

Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración  
*prBPA\**

Valeria K. Becker

Director: Dr. Pedro R. D'Argenio

*Agradezco su gran apoyo y colaboración al comienzo de este trabajo a la Dra. Tamara Rezk. También agradezco a mis hermanos Paola y Alejandro por contar siempre con ellos. A mis amigos por ser hermosas personas y estar a mi lado. A mi director por su gran apoyo y guía. A Rodrigo por su amor, su paciencia, por motivarme, acompañarme y mezclar sus letras con mis números.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Lógica ecuacional . . . . .	5
2.1.1. Signaturas, términos y sustitución . . . . .	5
2.1.2. Teoría ecuacional . . . . .	7
2.1.3. Álgebras . . . . .	8
<b>3. Introducción al Álgebra básica de procesos con iteración <math>BPA^*</math></b>	<b>14</b>
3.1. Grafos de proceso . . . . .	15
3.2. Álgebra básica de procesos $BPA$ . . . . .	16
3.2.1. Signatura de $BPA$ . . . . .	16
3.2.2. Modelo de grafos . . . . .	17
3.2.3. Axiomas para $BPA$ . . . . .	19
3.3. Extensión de $BPA$ a $BPA^*$ . . . . .	20
<b>4. Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración <math>prBPA^*</math>: Sintaxis y semántica</b>	<b>23</b>
4.1. Modelo generativo de procesos probabilistas . . . . .	24
4.2. Signatura de $prBPA^*$ . . . . .	26
4.3. Modelo de grafos probabilistas . . . . .	27
4.3.1. Semántica del álgebra . . . . .	28
4.3.2. Bisimulación probabilista . . . . .	32
4.3.3. Congruencia . . . . .	35
<b>5. Teoría ecuacional para <math>prBPA^*</math></b>	<b>47</b>
5.1. Sistema de Axiomas . . . . .	47
5.2. Consistencia . . . . .	49
<b>6. Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración infinita <math>prBPA^\omega</math></b>	<b>73</b>
6.1. Signatura de $prBPA^\omega$ . . . . .	73
6.2. Semántica . . . . .	74
6.2.1. Congruencia . . . . .	74
6.3. Teoría Ecuacional de $prBPA^\omega$ . . . . .	76
6.3.1. Consistencia . . . . .	77
6.4. $prBPA^\omega + RSP$ . . . . .	80
<b>7. Conclusión</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El *Álgebra de procesos* es una teoría algebraica usada para especificar y verificar procesos. La palabra *proceso* se refiere al comportamiento de un sistema. Un sistema puede ser cualquier entidad que muestre un comportamiento, en particular la ejecución de un sistema de software, las acciones de una máquina o también las acciones de un ser humano. El comportamiento es el total de eventos o acciones que un sistema puede ejecutar, el orden en el cual ellos pueden ser ejecutados y también otros aspectos de la ejecución tales como temporización o probabilidades. La palabra *álgebra* denota que el punto de vista en la discusión sobre comportamiento es algebraico y axiomático. El álgebra de procesos se enfoca en la especificación y manipulación de términos que representan procesos. Muchas álgebras de procesos contienen operadores básicos para construir procesos finitos, operadores de comunicación para expresar concurrencia, y alguna noción de recursión para capturar comportamiento posiblemente infinito.

El núcleo de toda álgebra de procesos consiste en un conjunto de operadores (incluyendo a las constantes como operadores de aridad nula) y un conjunto de axiomas. Los axiomas son de la forma  $t = t'$ , donde  $t$  y  $t'$  son términos del álgebra de procesos considerada que contienen operadores y/o variables libres.

Comúnmente usamos grafos para representar procesos. Un *grafo de proceso* es un sistema de transición etiquetado donde cada estado representa un término de proceso y el conjunto de etiquetas es el conjunto de acciones atómicas que el sistema puede ejecutar.

El *Modelo de grafos* se usa para proporcionar semántica y asigna formalmente a cada término de proceso del álgebra su supuesto grafo de proceso. El punto principal del álgebra de procesos es que ella impone una lógica ecuacional sobre términos de proceso, tal que dos términos de proceso pueden ser igualados si y sólo si sus grafos de proceso son equivalentes en su comportamiento. Un álgebra de procesos puede extenderse con nuevos operadores, para mejorar su expresividad o para facilitar la especificación del comportamiento del sistema. Cada operador nuevo requiere una extensión de la semántica y de la lógica ecuacional.

El álgebra de procesos constituye una estructura para razonamiento formal sobre procesos y datos, con énfasis sobre procesos que son ejecutados concurrentemente. Ella puede usarse para detectar propiedades indeseables y para derivar formalmente propiedades deseables de la especificación de un sistema. Es relevante destacar que el álgebra de procesos puede usarse para verificar que un sistema muestra el comportamiento externo deseado, entendiendo por esto que cada entrada produce la salida correcta. En primer lugar, la implementación del sistema se expresa como un término de proceso, usando los operadores

básicos y los operadores de comunicación y recursión. Finalmente, el término de proceso resultante es manipulado por medio de la lógica ecuacional, para probar que su grafo se ajusta al comportamiento externo deseado.

Las álgebras probabilistas presentadas hasta hoy están diseñadas para los operadores estandar del álgebra de procesos, como los operadores de secuencia ( $\cdot$ ), elección ( $+$ ) y concurrencia ( $\parallel$ ), pero no modelan comportamiento iterativo. Nuestra contribución consistirá en construir un álgebra capaz de modelar procesos con este tipo de comportamiento. El trabajo pretende encontrar una axiomatización consistente de procesos probabilistas. En el primer paso construiremos el *Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración*  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Para ello, partiremos de las álgebras  $\mathcal{BPA}^*$  (Process Algebra with Iteration) de Bergstra, Bethke y Ponse [BBP94] -donde lo destacado es la introducción del operador de iteración llamado *estrella binaria de Kleene-* y  $pr\mathcal{BPA}$  (Basic Probabilistic Process Algebra) de Baeten, Bergstra y Smolka [BBS95], y obtendremos como resultado final el sistema de axiomas  $pr\mathcal{BPA}^*$ , una versión probabilista de  $\mathcal{BPA}^*$  cuya principal innovación consiste en un operador de iteración probabilista.

Se comenzará por una primera introducción a  $\mathcal{BPA}$  mostrando luego la extensión a  $\mathcal{BPA}^*$ ; continuaremos con la versión probabilista  $pr\mathcal{BPA}$ , para así, partiendo de ésta, trabajar en la introducción de los nuevos axiomas para la versión probabilista de la *estrella binaria de Kleene*.

Con el sistema de axiomas ya construido, procedemos a definir un *Modelo de grafos de procesos* para  $pr\mathcal{BPA}^*$  basado en equivalencia de *Bisimulación probabilista*. Usando este modelo probamos que la bisimulación es una congruencia, y probamos también que nuestro sistema  $pr\mathcal{BPA}^*$  es una axiomatización consistente.

Hacia el final de nuestro trabajo desarrollaremos una nueva álgebra que extiende a  $pr\mathcal{BPA}^*$  y la llamaremos  $pr\mathcal{BPA}^\omega$  cuya característica principal será la de poder modelar procesos con comportamiento infinito. Este comportamiento se presenta en la forma de iteración infinita, la cual es conseguida incluyendo las probabilidades extremas al operador de iteración probabilista del algebra  $pr\mathcal{BPA}^*$  y presentando un nuevo operador de iteración infinita. Aquí también es nuestro interés obtener una teoría consistente y usaremos las mismas herramientas que en  $pr\mathcal{BPA}^*$  para lograr nuestro propósito.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo introductorio retomaremos y repasaremos los conceptos básicos de la teoría del álgebra indispensables para lo que este trabajo buscará aportar. El capítulo se fundamenta en las aproximaciones de los libros de Fokkink [Fok00]; Baeten y Weijland [BW90]; y Baeten, Basten y Reniers [BBR06].

### 2.1. Lógica ecuacional

En esta sección presentamos las nociones básicas de especificación algebraica; en ella se captura el significado de los términos sobre una cierta signatura usando ecuaciones. Las ecuaciones, como expresión de igualdad entre dos objetos, aparecen con muchísima frecuencia en matemáticas y también es muy importante en computación: sistemas de cálculo simbólico, verificación de programas, tipos abstractos de datos y demostración automática, por citar algunos ejemplos. El razonamiento ecuacional se formaliza mediante la lógica ecuacional. En ella, las sentencias son ecuaciones entre términos. Problemas típicos en la lógica ecuacional son, por ejemplo, determinar si una ecuación es consecuencia lógica de un conjunto de axiomas ecuacionales, buscar aquellos elementos para los cuales se verifica una ecuación (sus soluciones), o determinar si una ecuación es válida en un modelo inicial.

Las definiciones de esta subsección están tomadas, esencialmente, de Fokkink [Fok00]. Puesto que vamos a definir una lógica (la lógica ecuacional), hemos de definir el lenguaje de la misma (su sintaxis) y el significado de sus expresiones (su semántica). En este caso, la sintaxis viene definida por una signatura y por los términos de primer orden en dicha signatura.

#### 2.1.1. Signaturas, términos y sustitución

Los *términos* responden a una *sintaxis*. Tal sintaxis se define a través de símbolos de función u operadores. El conjunto de todos estos operadores forman la *signatura* donde se hayan tales términos. En esta sección presentamos los conceptos de *signatura*, *término* y *sustitución*.

**Definición 1.** (*Signatura*) Una signatura  $\Sigma$  consiste en un conjunto finito de símbolos de función (u operadores)  $f, g, \dots$ , donde cada símbolo de función  $f$  tiene una aridad  $ar(f)$ , siendo esta su cantidad de argumentos.

A un símbolo de función  $a, b, c, \dots$  de aridad cero lo llamamos una constante, a un símbolo de función de aridad uno lo llamamos unario y a un símbolo de función de aridad dos, binario.

**Ejemplo 1.** (*Signatura*) Como ejemplo, consideremos la signatura  $\Sigma_1$  que consta del símbolo de constante  $0$ , el símbolo de función unario  $s$ , y los símbolos de función binarios  $a$  y  $m$ . A continuación presentamos la signatura  $\Sigma_1$  colocando las aridades de los operadores como superíndices de ellos (para una mejor notación no colocaremos la aridad de las constantes):

$$\Sigma_1 = \{0, s^1, a^2, m^2\}$$

Supondremos la presencia de un conjunto infinito y contable de variables  $x, y, z, \dots$ , a dicho conjunto lo llamaremos  $Var$ .

**Definición 2.** (*Término*) Sea  $\Sigma$  una signatura. El conjunto  $\mathcal{T}(\Sigma)$  de términos (abiertos)  $s, t, u, \dots$  sobre  $\Sigma$  es definido como el menor conjunto que satisface:

- cada variable está en  $\mathcal{T}(\Sigma)$ ;
- si  $f \in \Sigma$  y  $t_1, \dots, t_{ar(f)} \in \mathcal{T}(\Sigma)$ , entonces  $f(t_1, \dots, t_{ar(f)}) \in \mathcal{T}(\Sigma)$

Es decir, las variables son términos y mediante la aplicación de un símbolo de función de aridad  $n$  a  $n$  términos se obtiene un nuevo término. Un término es *cerrado* si no contiene variables.

Además del concepto de término, otro de los conceptos que manejaremos constantemente será el de *sustitución*. Una sustitución es un mapeo  $\sigma$  de las variables al conjunto  $\mathcal{T}(\Sigma)$  de términos abiertos. La idea principal de este concepto es que, partiendo de un término cualquiera, cuando le aplicamos una sustitución determinada, obtenemos un nuevo término.

**Definición 3.** (*Sustitución*). Una sustitución en  $\mathcal{T}(\Sigma)$  (o simplemente una sustitución) es una función  $\sigma : Var \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma)$  tal que  $\sigma(x) \neq x$  sólo para una cantidad finita de variables  $x \in Var$ . El conjunto finito de variables tal que  $\sigma(x) \neq x$  se denomina el dominio de  $\sigma$  y se nota por  $D(\sigma)$ .

Toda sustitución  $\sigma$  en  $\mathcal{T}(\Sigma)$  se puede extender a una función  $\hat{\sigma}$  definida en todo el conjunto  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . La definición de  $\hat{\sigma}$  es recursiva en la estructura de los términos.

**Definición 4.** (*Sustitución en términos*) Sea  $\sigma$  una  $\mathcal{T}(\Sigma)$ -sustitución. Definimos la aplicación de la sustitución  $\sigma$  a un término  $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$ :

- $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$ , si  $x \in Var$
- $\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$

Abusando de la notación, en lo sucesivo, escribiremos  $\sigma$  en lugar de  $\hat{\sigma}$  y supondremos que una sustitución está definida en todo el conjunto  $\mathcal{T}(\Sigma)$ .

### 2.1.2. Teoría ecuacional

En esta sección introduciremos el concepto de *Teoría ecuacional*. Una teoría ecuacional es una signatura (un “lenguaje”) junto con un conjunto de ecuaciones sobre esta signatura (las leyes básicas). Esta herramienta nos sirve para poder formalizar el comportamiento del álgebra con la que trabajaremos. Esta formalización se logra utilizando axiomas (o ecuaciones) que capturan el significado de los términos de una signatura dada, acompañados por una relación de igualdad que nos brinda una herramienta para obtener conclusiones sobre el álgebra.

**Definición 5.** (*Teoría ecuacional*) Una *Teoría ecuacional o axiomatización sobre una signatura*  $\Sigma$  es una tupla  $(\Sigma, E)$ , donde  $E$  es un conjunto finito de ecuaciones, llamadas *axiomas*, de la forma  $s = t$  con  $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ .

Una axiomatización da lugar a una relación de igualdad  $=$  sobre  $\mathcal{T}(\Sigma)$ .

**Ejemplo 2.** (*Teoría ecuacional*) El Cuadro 2.1 nos muestra la teoría  $T_1 = (\Sigma_1, E_1)$ , donde  $\Sigma_1$  es la signatura del Ejemplo 1. Al comienzo de la tabla se listan las variables usadas en las ecuaciones de  $E_1$ . Asumimos que las variables pueden ser siempre distinguidas de los símbolos de la signatura y toman valores de la colección de términos de procesos básicos.

$T_1$		
$x, y;$		
$a(x, 0)$	$=$	$x$ PA1
$a(x, s(y))$	$=$	$s(a(x, y))$ PA2
$m(x, 0)$	$=$	$0$ PA3
$m(x, s(y))$	$=$	$a(m(x, y), x)$ PA4

Cuadro 2.1: La Teoría ecuacional  $T_1 = (\Sigma_1, E_1)$

El objetivo de una teoría ecuacional es describir qué términos sobre la signatura de esta teoría ecuacional son considerados equivalentes.

**Definición 6.** (*Derivabilidad*) Dada  $T = (\Sigma, E)$  una teoría ecuacional; sea  $V$  un conjunto de variables y sean  $s$  y  $t$  términos en  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . La ecuación  $s = t$  es derivable en la teoría  $T$ , denotado como  $T \vdash s = t$ , si y sólo si se obtiene a partir de las siguientes reglas:

(**Regla de axioma**) para cualquier ecuación  $s = t \in E$ ,

$T \vdash s = t$ ;

(**Sustitución**) para cualquier término  $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma)$  y cualquier sustitución  $\sigma : V \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma)$ ,

$T \vdash s = t$  implica que  $T \vdash \sigma(s) = \sigma(t)$ ;

(**Reflexividad**) para cualquier término  $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,

$T \vdash t = t$ ;

(**Simetría**) para cualquier término  $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,

$T \vdash s = t$  implica que  $T \vdash t = s$ ;

(**Transitividad**) para cualquier término  $s, t, u \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,

$T \vdash s = t$  y  $T \vdash t = u$  implica que  $T \vdash s = u$ ;

(**Regla de contexto**) para cualquier símbolo de función  $n$ -ario  $f \in \Sigma (n \geq 1)$ , cualquier



término  $s, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}(\Sigma)$ , y cualquier número natural  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ ,  $T \vdash t_i = s$  implica que  $T \vdash f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_{i+1}, \dots, t_n)$ .

**Ejemplo 3.** (*Derivabilidad*) Consideremos la teoría ecuacional  $T_1 = (\Sigma_1, E_1)$  del Ejemplo 2. La siguiente derivación muestra que  $T_1 \vdash a(s(0), s(0)) = s(s(0))$ . Dada  $\sigma$  la sustitución que mapea  $x$  en  $s(0)$  e  $y$  en  $0$ .

1.  $T_1 \vdash a(x, s(y)) = s(a(x, y))$  (Axioma PA2)
2.  $T_1 \vdash a(s(0), s(0)) = s(a(s(0), 0))$  (línea 1: sustitución  $\sigma$ )
3.  $T_1 \vdash a(x, 0) = x$  (Axioma PA1)
4.  $T_1 \vdash a(s(0), 0) = s(0)$  (línea 3: sustitución  $\sigma$ )
5.  $T_1 \vdash s(a(s(0), 0)) = s(s(0))$  (línea 4: regla de contexto)
6.  $T_1 \vdash a(s(0), s(0)) = s(s(0))$  (línea 2 y 5: transitividad)

**Definición 7.** (*Extensión de una teoría ecuacional*) Consideremos dos teorías ecuacionales  $T_1 = (\Sigma_1, E_1)$  y  $T_2 = (\Sigma_2, E_2)$ . La teoría  $T_2$  es una extensión de la teoría  $T_1$  si y sólo si  $\Sigma_2$  contiene a  $\Sigma_1$  y  $E_2$  contiene a  $E_1$ .

**Ejemplo 4.** (*Extensión de una teoría ecuacional*) El Cuadro 2.2 describe la extensión de la teoría ecuacional  $T_1$  del Ejemplo 2 con un símbolo de función binario e llamada  $T_2$ . Al comienzo de la tabla se listan las variables usadas en las ecuaciones. La lista de ecuaciones contiene los axiomas PA1-5 de  $T_1$  y los nuevos axiomas PA6-7 para el operador  $e$ .

$T_2$		
$x, y, z;$		
$a(x, 0)$	$= x$	PA1
$a(x, s(y))$	$= s(a(x, y))$	PA2
$m(x, 0)$	$= 0$	PA3
$m(x, s(y))$	$= a(m(x, y), x)$	PA4
$e(x, 0)$	$= s(0)$	PA5
$e(x, s(y))$	$= s(a(x, y))$	PA6

Cuadro 2.2: La teoría ecuacional  $T_2 = (\Sigma_2, E_2)$

### 2.1.3. Álgebras

En lo expuesto hasta este punto, las teorías ecuacionales carecían de significado. Esta sección abordará el significado o semántica de las teorías ecuacionales. El significado de una teoría ecuacional está dado por un álgebra.

Dado un conjunto de axiomas de una cierta teoría ecuacional  $T = (\Sigma, E)$ , es posible construir un modelo: una estructura matemática en la cual todos los operadores de  $\Sigma$  tienen una interpretación y todos los axiomas de  $E$  son obedecidos. Tal modelo es usualmente

llamado una sémantica de  $T$ . Vale la pena resaltar que uno de los propósitos del álgebra de procesos como método formal es desarrollar una teoría (método) que pueda ser usada en diferentes modelos. De todas formas, en la literatura hay una tendencia a usar dos modelos: el de términos, fundado en un sistema de deducción de términos (también llamado *semántica operacional*), y el modelo de grafos, fundado en una representación gráfica de los términos. Aunque la interpretación de los términos de  $T$  difiere en ambos modelos -ya que en un modelo los elementos son términos, mientras que en el otro son grafos-, ellos están fuertemente relacionados porque ambos están basados en una noción de igualdad llamada relación de bisimulación. En este trabajo usaremos el modelo de grafos para dar semántica a nuestra teoría algebraica.

**Definición 8.** (*Álgebra*) Un álgebra  $\mathbb{A}$  consiste en un conjunto de elementos  $\mathbf{A}$  junto con constantes en  $\mathbf{A}$  y funciones sobre  $\mathbf{A}$ . El conjunto de elementos de  $\mathbf{A}$  de un álgebra  $\mathbb{A}$  se llama el universo, dominio, o conjunto carrier de  $\mathbb{A}$ .

**Ejemplo 5.** (*Álgebra  $\mathbb{B}$* ) La estructura  $\mathbb{B} = (\mathbf{B}, \wedge, \neg, true)$  es el álgebra de los Booleanos  $\mathbf{B} = \{true, false\}$ , donde  $true$  es una constante,  $\neg$  es la función de negación unaria sobre Booleanos y  $\wedge$  es la función de conjunción binaria sobre Booleanos. Usualmente, estas funciones están definidas por tablas de verdad.

**Ejemplo 6.** (*Álgebra  $\mathbb{N}$* ) La estructura  $\mathbb{N} = (\mathbf{N}, +, \times, succ, 0)$  es el álgebra de los números naturales  $\mathbf{N} = (0, 1, 2, \dots)$  con la función unaria sucesor  $succ$ , las bien conocidas funciones binarias  $+$  y  $\times$ , y la constante  $0$ .

**Definición 9.** ( *$\Sigma$ -álgebra*) Dada una signatura  $\Sigma$  como en la Definición 1. Llamamos  $\Sigma$ -álgebra a un álgebra  $\mathbb{A}$  cuando hay un mapeo de los símbolos de la signatura  $\Sigma$  en las constantes y funciones del álgebra que respete las aridades. Dicho mapeo se denomina interpretación.

**Ejemplo 7.** ( *$\Sigma$ -álgebra*) Recordemos que en el Ejemplo 1 la signatura  $\Sigma_1$  es la que contiene la constante  $0$ , el símbolo de función unario  $s$  y los símbolos de función binarios  $a$  y  $m$ . El álgebra  $\mathbb{N}$  del Ejemplo 6 es una  $\Sigma$ -álgebra con la interpretación  $\iota_1$  definida por

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0} & \mapsto 0 \\ \mathbf{s} & \mapsto succ \\ \mathbf{a} & \mapsto + \\ \mathbf{m} & \mapsto \times \end{array}$$

Hasta este momento, el énfasis en la distinción entre símbolos de constante y símbolos función y las constantes y funciones reales es claro. Una signatura contiene meramente símbolos de función sin significado; un álgebra contiene constantes y funciones reales. Para darles un significado a los símbolos de una signatura construimos un mapeo entre ellos y las

constantes y funciones en un álgebra. Recordemos que, como expusimos en la Definición 5, una teoría ecuacional consiste en una signatura más un conjunto de ecuaciones. Se trata, entonces, de otorgarle significado a una teoría ecuacional por medio de una interpretación de los términos en un álgebra, como definimos anteriormente. Surge por lo tanto el interrogante acerca de si es adecuada una interpretación arbitraria que preserve las aridades. Para operar en relación a este problema se vuelve necesario un requisito extra que exige que las ecuaciones de la teoría sean en algún sentido verdaderas en el álgebra. La siguiente definición captura la noción precisa de verdad.

**Definición 10.** (Validez) Sea  $\Sigma$  una signatura,  $V$  un conjunto de variables, y  $\mathbb{A}$  una  $\Sigma$ -álgebra con dominio  $\mathbf{A}$ . Sea  $\iota$  una interpretación de  $\Sigma$  en  $\mathbb{A}$ . Una valuación  $\alpha : V \rightarrow \mathbf{A}$  es una función que mapea variables en  $V$  a elementos del dominio del álgebra  $\mathbb{A}$ . Para cualquier término abierto  $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,  $\iota_\alpha(t)$  es el elemento de  $\mathbf{A}$  que se obtiene de reemplazar todos los símbolos de constante y función en  $t$  por las correspondientes constantes y funciones en  $\mathbb{A}$  de acuerdo a  $\iota$  y reemplazando todas las variables en  $t$  por elementos de  $\mathbf{A}$  de acuerdo a  $\alpha$ . Es decir,

- (i) para cada variable  $x$  en  $V$ ,  $\iota_\alpha(x) = \alpha(x)$ ,
- (ii) para cada constante  $c$  en  $\Sigma$ ,  $\iota_\alpha(c) = \iota(c)$ , y
- (iii) para cualquier símbolo de función  $f$   $n$ -ario ( $n \geq 1$ ) y términos  $t_1, \dots, t_n$  en  $\mathcal{T}(\Sigma)$ ,  $\iota_\alpha(f(t_1, \dots, t_n))$  es el término  $\iota(f)(\iota_\alpha(t_1), \dots, \iota_\alpha(t_n))$ .

Sean  $s$  y  $t$  términos en  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . La ecuación  $s = t$  es válida en el álgebra  $\mathbb{A}$  bajo la interpretación  $\iota$ , denotado como  $\mathbb{A}, \iota \models s = t$ , si y sólo si, para todas las valuaciones  $\alpha : V \rightarrow \mathbf{A}$ ,  $\iota_\alpha(s) =_{\mathbf{A}} \iota_\alpha(t)$ , donde  $=_{\mathbf{A}}$  es la identidad sobre el dominio  $\mathbf{A}$ .

**Ejemplo 8.** (Validez) Consideremos la teoría ecuacional  $T_1$  del Ejemplo 2, el álgebra  $\mathbb{N} = (\mathbf{N}, +, \times, \text{succ}, 0)$  de los números naturales y la interpretación  $\iota_1$  dada en el Ejemplo 6.

Las ecuaciones  $a(x, 0) = x$  y  $a(x, y) = a(y, x)$  son válidas en el álgebra  $\mathbb{N}$  bajo la interpretación  $\iota_1$ :

$\mathbb{N}, \iota_1 \models a(x, 0) = x$  y  $\mathbb{N}, \iota_1 \models a(x, y) = a(y, x)$  porque  $n + 0 =_{\mathbf{N}} n$ ,  $m + n =_{\mathbf{N}} n + m$  son verdaderas para todos los números naturales  $m, n \in \mathbf{N}$ .

Un álgebra es un modelo de una teoría ecuacional bajo una interpretación si y sólo si todos los axiomas de la teoría son válidos en el álgebra bajo esta interpretación.

**Definición 11.** (Modelo). Sea  $T = (\Sigma, E)$  una teoría ecuacional,  $\mathbb{A}$  una  $\Sigma$ -álgebra, y  $\iota$  una interpretación de  $\Sigma$  en  $\mathbb{A}$ . El álgebra  $\mathbb{A}$  es un modelo de  $T$  respecto de la interpretación  $\iota$ , denotado como  $\mathbb{A}, \iota \models T$  o como  $\mathbb{A}, \iota \models E$  (dependiendo de qué sea más conveniente), si y sólo si, para todas las ecuaciones  $s = t \in E$ ,  $\mathbb{A}, \iota \models s = t$ .

Si  $\mathbb{A}$  es un modelo de  $T$  se dice que  $T$  es una axiomatización consistente de  $\mathbb{A}$ .

**Proposición 1.** (Consistencia) Sea  $T = (\Sigma, E)$  una teoría ecuacional con el modelo  $\mathbb{A}$  bajo alguna interpretación  $\iota$ . Para todos los  $\Sigma$ -términos  $s$  y  $t$ ,  $T \vdash s = t$  implica que  $\mathbb{A}, \iota \models s = t$ .

**Ejemplo 9.** (Modelo) Consideremos nuevamente la teoría ecuacional  $T_1$  del Ejemplo 2, el álgebra  $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \times, \text{succ}, 0)$  de los números naturales, y la interpretación  $\iota_1$  dada en el Ejemplo 7. No es difícil verificar que  $\mathbb{N}$  es un modelo de  $T_1$  bajo la interpretación  $\iota_1$ .

Es posible también obtener modelos de una teoría extendiendo modelos existentes. Agregar elementos al dominio de un modelo de una teoría nos da como resultado otro modelo de la teoría.

**Corolario 1.** Dadas  $T_1$  y  $T_2$  dos teorías ecuacionales tales que  $T_2$  es una extensión de  $T_1$ . Cualquier modelo  $\mathbb{A}$  de  $T_2$  es también un modelo de  $T_1$ , es decir,  $\mathbb{A} \models T_2$  implica que  $\mathbb{A} \models T_1$ .

Entre todos los modelos de una teoría ecuacional  $T = (\Sigma, E)$  hay un modelo especial llamado el *álgebra inicial*, que valida precisamente todas las ecuaciones de términos cerrados que son derivables desde  $E$ . El álgebra inicial de una teoría ecuacional es un ejemplo de la también llamada *álgebra cociente*. Para definir la noción de álgebra cociente, son necesarias algunas definiciones auxiliares.

**Definición 12.** (Equivalencia) Una relación de equivalencia sobre algún universo de elementos es una relación binaria que es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Definición 13.** (Clases de equivalencia) Sea  $U$  algún universo de elementos y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $U$ . La clase de equivalencia de un elemento es el conjunto de todos los elementos equivalentes a este elemento: es decir, para cualquier elemento  $u \in U$ , la clase de equivalencia de  $u$ , denotada por  $[u]_{\sim}$  es el conjunto  $\{v \in U \mid u \sim v\}$ . El elemento  $u$  se dice que es un representante de la clase de equivalencia.

Supongamos que queremos modificar un modelo de una teoría ecuacional identificando los elementos de su dominio por medio de alguna relación de equivalencia  $R$ , de modo de disminuir la cantidad de elementos. Entonces podríamos preguntarnos si la estructura resultante (con clases de equivalencia como elementos en su dominio, en vez de los elementos mismos) es también un modelo de la teoría: resulta que no siempre ocurre así. Necesitamos estar seguros de que en el nuevo modelo los valores de las funciones permanecen independientes de la elección de los elementos dentro de su misma clase de equivalencia. Si una relación de equivalencia cumple con esta propiedad decimos que es una congruencia.

**Definición 14.** (Congruencia) Sea  $\mathbb{A}$  un álgebra con universo  $\mathbf{A}$ . Una relación binaria  $\sim$  sobre  $\mathbf{A}$  es una congruencia sobre  $\mathbb{A}$  si y sólo si ella satisface los siguientes requerimientos:

- (i)  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre  $\mathbf{A}$  y,
- (ii) para toda función  $f$   $n$ -aria ( $n \geq 1$ ) de  $\mathbb{A}$ , cualquier elemento  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$ , tal que  $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$  implica que  $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$ .

**Definición 15.** (*Álgebra cociente*) Sea  $\mathbb{A}$  un álgebra y  $\sim$  una congruencia sobre  $\mathbb{A}$ . El álgebra cociente  $\mathbb{A}$  módulo  $\sim$ , denotado como  $\mathbb{A}/\sim$ , tiene un universo que consta de las clases de equivalencia de  $\mathbb{A}$  bajo  $\sim$ , denotado como  $\mathbf{A}/\sim$  y además contiene las siguientes constantes y funciones:

- (i) para cada constante  $c$  de  $\mathbb{A}$ ,  $[c]_{\sim}$  es una constante de  $\mathbb{A}/\sim$ ;
- (ii) para cada función  $n$ -aria  $f$  de  $\mathbb{A}$ ,  $f_{\sim} : (\mathbf{A}/\sim)^n \rightarrow \mathbf{A}/\sim$  es una función  $n$ -aria de  $\mathbb{A}/\sim$ , donde, para todo  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A}$ ,  $f_{\sim}([a_1]_{\sim}, \dots, [a_n]_{\sim}) = [f(a_1, \dots, a_n)]_{\sim}$

Notar que  $f_{\sim}([a_1]_{\sim}, \dots, [a_n]_{\sim}) = [f(a_1, \dots, a_n)]_{\sim}$  está bien definido por lo expresado en la Definición 14.

Dada una teoría ecuacional  $T = (\Sigma, E)$ , diremos que dos elementos  $s$  y  $t$  de  $\mathcal{T}(\Sigma)$  están relacionados mediante la relación de derivabilidad si la ecuación  $s = t$  es derivable en la teoría como lo indica la Definición 6. Como podemos observar, la relación de derivabilidad es una relación de equivalencia. Un ejemplo importante de álgebra cociente es el álgebra inicial de una teoría ecuacional, la cual se obtiene como lo indica la siguiente definición.

**Definición 16.** (*Álgebra inicial*) Dada  $T = (\Sigma, E)$  una teoría ecuacional. Consideremos el álgebra  $\mathbb{C}(\Sigma)$  con el conjunto  $C(\Sigma)$  de términos cerrados de  $\mathcal{T}(\Sigma)$  como su dominio y las constantes y símbolos de función de  $\Sigma$  como sus constantes y símbolos de función. La relación de derivabilidad es una congruencia sobre el álgebra  $\mathbb{C}(\Sigma)$ . El álgebra inicial de  $T$ , denotada por  $\mathbb{I}(\Sigma, E)$  es el álgebra cociente  $\mathbb{C}(\Sigma)$  módulo derivabilidad.

**Ejemplo 10.** (*Álgebra inicial/cociente*) Los elementos en el dominio del álgebra inicial de una teoría ecuacional son conjuntos de términos cerrados que son iguales respecto de la relación de derivabilidad. Como un ejemplo estándar consideremos la teoría ecuacional  $N = (\Sigma_N, E_N)$ , donde  $\Sigma_N$  consta de la constante  $0$ , la función unaria sucesor  $S$ , y las funciones binarias suma  $+$  y multiplicación  $\cdot$ ; la relación de igualdad sobre términos es especificada por axiomas de  $E_N$ :

1.  $x + 0 = x$
2.  $x + S(y) = S(x + y)$
3.  $x \cdot 0 = 0$
4.  $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

Los elementos del dominio del modelo inicial  $\mathbb{I}(\Sigma_N, E_N)$  de esta axiomatización consisten en las distintas clases de equivalencia

$$[0]_{\vdash} = \{0, S(0) \cdot 0, 0 + 0, \dots\},$$

$$[S(0)]_{\vdash} = \{S(0), S(0) + 0, S(0) \cdot S(0), \dots\},$$

$$[S(S(0))]_{\vdash} = \{S(S(0)), S(0) + S(0), S(S(0)) \cdot S(0), \dots\}, \text{ etc.}$$

Las tres primeras clases de equivalencia, con algunos representativos típicos de estas clases, están graficados en la Figura 2.1.

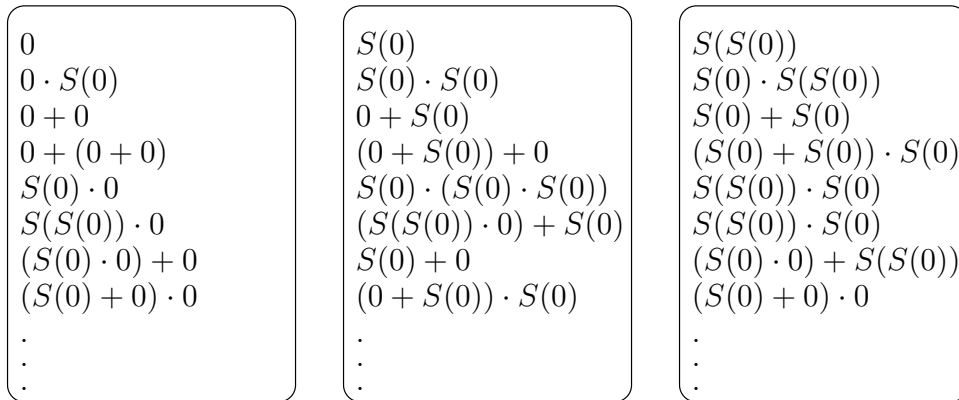


Figura 2.1: Algunos elementos del álgebra inicial de la teoría  $N$

## Capítulo 3

# Introducción al Álgebra básica de procesos con iteración $\mathcal{BPA}^*$

El álgebra de procesos más simple con la que comenzamos este trabajo se denomina Álgebra básica de procesos,  $\mathcal{BPA}$  (Basic Process Algebra). Esta álgebra contiene dos operadores binarios: la composición alternativa  $+$  y la composición secuencial  $\cdot$ ; y un conjunto de constantes u operadores de aridad cero. El operador  $+$  sirve para modelar procesos cuya ejecución puede llevarse adelante de dos maneras distintas; el operador  $\cdot$  se utiliza para modelar procesos que se ejecutan uno después de otro; y las constantes modelan acciones atómicas. A partir de aquí, extenderemos esta álgebra con un nuevo operador llamado operador de iteración o *estrella binaria de Kleene* definida en [Kle56] para obtener el álgebra  $\mathcal{BPA}^*$ , que sirve además para modelar procesos que presentan comportamiento iterativo.

En este capítulo ofreceremos una breve introducción a los aspectos básicos del álgebra de procesos desde los trabajos realizados por Fokkink en [Fok00], Baeten y Weijland en [BW90], Baeten y Verhoef en [BV95] y Baeten, Basten y Reniers en [BBR06]. El propósito de esta perspectiva es dar los fundamentos sobre los cuales construiremos nuestra extensión probabilista.

El *Álgebra de procesos* es una teoría algebraica usada para especificar, verificar y, en general, para estudiar *procesos*. En esta álgebra, los procesos y su comportamiento se escriben en forma de expresiones (*términos*) y las relaciones entre ellos en forma de ecuaciones algebraicas. El núcleo de toda álgebra de procesos consiste en un conjunto de *operadores* (incluyendo a las constantes como operadores de aridad cero) y un conjunto de *axiomas* (ecuaciones). Detrás de cada operador y axioma hay una motivación intuitiva: una visión que explica la manera en que queremos componer procesos pequeños para obtener más grandes (por medio de los operadores) y cuáles procesos deben ser considerados iguales.

Las ecuaciones y operadores no tienen ningún significado a menos que los coloquemos en un cierto “mundo real” y relacionemos los términos del álgebra de procesos con las entidades en el mundo real. En la comunidad algebraica, este paso es tradicionalmente llamado “dar una interpretación de la teoría formal” y en la comunidad de las ciencias de la computación lo llamamos “dar una semántica de la sintaxis”.

En este trabajo usamos el *modelo de grafos* para dar semántica a las diferentes álgebras de procesos presentadas, por eso es que en esta sección introducimos el modelo de grafos junto con la definición de equivalencia de bisimulación como relación de igualdad entre

grafos. En el resto de la sección daremos las teorías ecuacionales de cada álgebra en forma modular, es decir, extendiendo cada álgebra con los nuevos operadores que se agregan.

### 3.1. Grafos de proceso

Un *grafo* consta de nodos y flechas. Una flecha va desde un nodo hacia otro nodo (o hacia él mismo); más de una flecha puede salir o llegar a un nodo; uno de los nodos es un nodo especial llamado raíz.

Un camino en un grafo es una serie alternante de nodos y flechas, tal que cada flecha va desde su nodo anterior al nodo posterior a ella. Sólo consideraremos grafos en los que todos los nodos pueden ser alcanzados desde la raíz siguiendo un camino finito. Un ciclo es un camino desde algún nodo que vuelve al mismo nodo. Un grafo es cíclico si contiene algún ciclo, de otra forma es acíclico. Un nodo final o endpoint de un grafo es un nodo que no tiene flechas de salida. Todos los otros nodos son llamados internos. Si  $g$  es un grafo y  $s$  es un nodo de  $g$ , entonces  $g_s$  es el subgrafo de  $g$  obtenido quitando a  $g$  todos los nodos que no son alcanzables desde  $s$  por un camino finito. Un grafo finitamente ramificado tiene en cada uno de sus nodos una cantidad finita de flechas de salida. Un grafo es finito o regular si tiene una cantidad finita de nodos y flechas. A un grafo acíclico, en el cual cada nodo tiene a lo sumo una flecha de entrada, lo llamamos árbol.

Dado  $A$  un conjunto de acciones atómicas y  $N$  un conjunto infinito y contable de nodos. Un *grafo de proceso* es un grafo en el cual cada flecha tiene una etiqueta que indica el nombre de una acción y los nodos son llamados estados. La raíz del grafo es el estado inicial del proceso. Si el grafo de proceso contiene una flecha  $s \xrightarrow{a} s'$ , esto significa que él puede evolucionar de un estado  $s$  a un estado  $s'$  ejecutando una acción  $a$ . Denotaremos a un grafo de procesos  $g$  de la siguiente forma  $g = \langle V, r, \longrightarrow \rangle$ , donde  $V$  es el conjunto de nodos,  $r \in V$  es la raíz y  $\longrightarrow \subseteq V \times A \times V$  es la relación de transición de  $g$ .

Los grafos de proceso son distinguibles módulo alguna equivalencia de comportamiento. Un amplio rango de equivalencias semánticas fueron desarrolladas para distinguir grafos de proceso. Equivalencias clásicas son equivalencia de traza (de ejecución) y equivalencia de bisimulación.

Este texto se centra en equivalencia de bisimulación, que no sólo requiere que dos procesos puedan ejecutar las mismas secuencias de transiciones, sino también que tengan la misma estructura de ramificación.

**Definición 17.** (*Bisimulación*) *Dados dos grafos de proceso  $g_1 = \langle V_1, r_1, \longrightarrow_1 \rangle$  y  $g_2 = \langle V_2, r_2, \longrightarrow_2 \rangle$ , una relación de bisimulación  $R$  es una relación binaria entre  $g_1$  y  $g_2$  tal que  $R \subseteq V_1 \times V_2$  y para todo  $p_1$  en  $V_1$  y  $p_2$  en  $V_2$ , se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  $(r_1, r_2) \in R$
2. si  $(p_1, p_2) \in R$  y  $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ , entonces  $\exists q_2 \in V_2$  tal que  $p_2 \xrightarrow{a} q_2$  y  $(q_1, q_2) \in R$ ; y viceversa
3. si  $(p_1, p_2) \in R$  y  $p_1$  es un estado final entonces  $p_2$  es un estado final; y viceversa

*Si existe una relación de bisimulación entre dos grafos de proceso  $g_1$  y  $g_2$  entonces decimos que  $g_1$  y  $g_2$  son bisimilares y lo denotamos como  $g_1 \sim g_2$ .*



No es difícil comprobar que  $\sim$  es una relación de equivalencia:

- $\sim$  es reflexiva, es decir,  $g \sim g$ ;
- $\sim$  es simétrica, es decir, si  $g_1 \sim g_2$  entonces  $g_2 \sim g_1$ ;
- $\sim$  es transitiva, es decir, si  $g_1 \sim g_2$  y  $g_2 \sim g_3$ , entonces  $g_1 \sim g_3$ .

De hecho,  $\sim$  divide la colección de grafos de proceso en clases de equivalencia.

**Ejemplo 11.** En la figura 3.1, podemos ver una relación de bisimulación entre dos grafos. Los nodos relacionados están conectados por una línea de puntos. Ya que existe una relación de bisimulación entre los grafos verificamos que ellos son bisimilares.

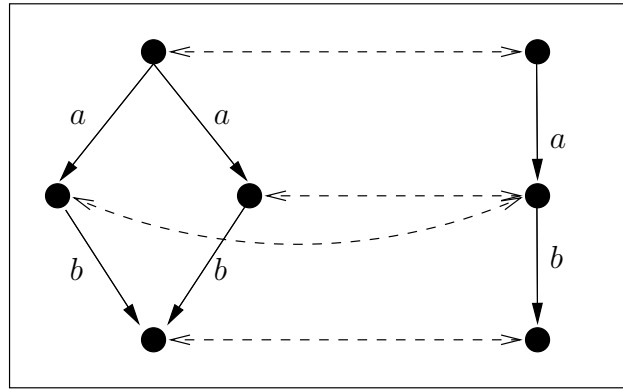


Figura 3.1: Bisimulación

## 3.2. Álgebra básica de procesos $\mathcal{BPA}$

En esta sección presentaremos una estructura básica para álgebras de procesos, la cual introduce operadores simples que nos permiten construir procesos finitos.

### 3.2.1. Signatura de $\mathcal{BPA}$

La signatura para el álgebra de procesos básica  $\Sigma(\mathcal{BPA})$  contiene dos operadores denotados por "+" y ".", y un conjunto de constantes (operadores de aridad cero) con nombres  $a, b, c, \dots$ . Usaremos la letra mayúscula  $A$  para el conjunto finito y no vacío de acciones (atómicas).

**Definición 18.** La signatura  $\Sigma(\mathcal{BPA})$  contiene las constantes  $a \in A$  y dos operadores binarios "+" y ".".

Cada proceso finito puede ser representado por un término cerrado que es construido desde el conjunto  $A$  de acciones atómicas, junto con los operadores "+" y ".". Tales expresiones se llaman términos de proceso básicos, y la colección de todos estos términos se denomina álgebra de procesos básica, abreviada como  $\mathcal{BPA}$ .

El comportamiento intuitivo de las constantes en el conjunto  $A$  es el de acciones atómicas que pueden ejecutarse a sí mismas y luego terminan satisfactoriamente, representando comportamiento indivisible (tal como leer o escribir un dato). El comportamiento intuitivo del operador binario “+” llamado composición alternativa es el de realizar una elección entre la ejecución de dos procesos. Es decir que el proceso  $x + y$  ejecuta o bien  $x$  o bien  $y$  pero no ambos. Por último, el comportamiento intuitivo del operador “.”, llamado composición secuencial, es el de ejecutar dos procesos secuencialmente. Es decir que el proceso  $x \cdot y$  ejecuta primero  $x$  y, al finalizar  $x$ , ejecuta  $y$  hasta ser completado. Como podemos observar, a diferencia del operador “+”, el operador “.” ejecuta los dos procesos que compone.

**Ejemplo 12.** (*constantes*) Supongamos un canal de transmisión de datos al que estamos conectados. Los procesos constantes o acciones atómicas que podemos ejecutar en este escenario podrían ser enviar un dato a través del canal, recibir un dato del canal y escuchar el canal. Los términos de estos procesos son los siguientes:

$$t_1 = \text{enviar}, t_2 = \text{recibir}, t_3 = \text{escuchar}$$

**Ejemplo 13.** (*operador .*) Supongamos el funcionamiento de una llave de luz, donde al presionar el botón de la llave se enciende una lamparita de luz. Podemos describir este comportamiento con el siguiente proceso:

$$t = \text{presionarboton} \cdot \text{enciendelampara}$$

En este término podemos distinguir las acciones atómicas “presionarboton”, que como lo indica su nombre representa la acción de presionar el botón de la llave y “enciendelampara”, que representa la acción que enciende la lamparita de luz.

**Ejemplo 14.** (*operador +*) Supongamos el funcionamiento de una máquina expendedora de café que posee dos botones, uno para café sólo y otro para café cortado con leche. Para describir el comportamiento de la máquina usaremos las acciones atómicas:

*botoncafe* = el usuario presiona el botón que indica café sólo;

*botoncortado* = el usuario presiona el botón que indica café con leche;

*sirvecafe* = la máquina entrega un vaso de café sólo;

*sirvecortado* = la máquina entrega un vaso de café con leche

Representemos el comportamiento del sistema con el siguiente proceso:

$$MC = \text{botoncafe} \cdot \text{sirvecafe} + \text{botoncortado} \cdot \text{sirvecortado}$$

### 3.2.2. Modelo de grafos

En esta sección abordaremos la interpretación de los términos del álgebra  $\mathcal{BPA}$  en el modelo de grafos de proceso, siguiendo lo expuesto por Fokkink en [Fok00].

- Para cada acción atómica  $a$  perteneciente al conjunto  $A$  el grafo correspondiente al término de proceso  $a$  se representa en la Figura 3.2.

El predicado  $s \xrightarrow{a} \surd$  indica que desde el estado  $s$  se termina satisfactoriamente luego de la ejecución de una acción  $a$ .

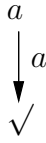


Figura 3.2: Grafo de la acción  $a$

- Para cada término de la forma  $p_1 + p_2$  con  $p_1$  y  $p_2$  términos de proceso de  $\mathcal{BPA}$  el grafo de proceso respectivo se obtiene uniendo los grafos de los procesos  $p_1$  y  $p_2$  en sus estados raíces de la siguiente manera: sean  $r_1$  y  $r_2$  las raíces de los grafos de los procesos  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, entonces para cada transición de la forma  $r_i \xrightarrow{a} x$  con  $i \in \{1, 2\}$ ,  $x$  un estado en alguno de los grafos de  $p_1$  o  $p_2$  y  $a \in A$  reemplazamos  $r_i$  por  $r$  siendo  $r$  la raíz del grafo de  $p_1 + p_2$ . Podemos observar el grafo del proceso  $p_1 + p_2$  en la Figura 3.3.

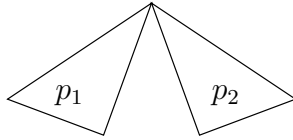


Figura 3.3: Composición alternativa de dos procesos

- Para cada término de la forma  $p_1 \cdot p_2$  con  $p_1$  y  $p_2$  términos de proceso de  $\mathcal{BPA}$  el grafo del proceso respectivo se obtiene reemplazando cada terminación satisfactoria  $s \xrightarrow{a} \checkmark$  en el grafo de  $p_1$  por una transición  $s \xrightarrow{a} r_2$ , donde  $r_2$  es la raíz del grafo de  $p_2$ . El grafo correspondiente al término  $p_1 \cdot p_2$  se representa en la Figura 3.4.

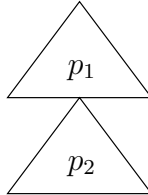


Figura 3.4: Composición secuencial de dos procesos

**Ejemplo 15.** (*Grafos de acciones atómicas*) En la figura 3.5 podemos ver los grafos correspondientes a las acciones atómicas del Ejemplo 12.

**Ejemplo 16.** (*Grafo de composición secuencial*) En la figura 3.6 podemos ver el grafo correspondiente al proceso del Ejemplo 13, que tiene como operador principal a la composición secuencial; a su izquierda se encuentran los grafos de los procesos que compone. Podemos ver como el nodo final del primer grafo es reemplazado por la raíz del segundo.

**Ejemplo 17.** (*Grafo de composición alternativa*) En la figura 3.7 podemos ver el grafo correspondiente al proceso del Ejemplo 14, que modela el funcionamiento de una máquina

de cafe. Este proceso Tiene como operador principal a la composición alternativa. A su izquierda se encuentran los grafos de los procesos que compone. Observamos como los nodos raíces son reemplazados por una nueva raíz.

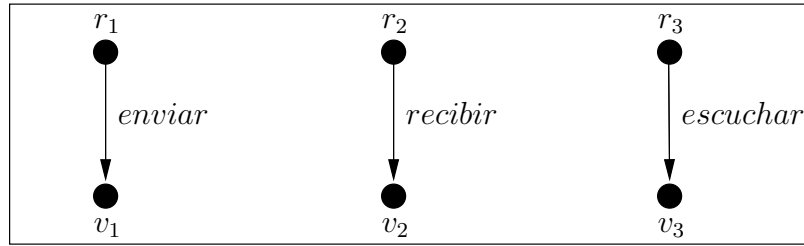


Figura 3.5: Grafos de acciones atómicas

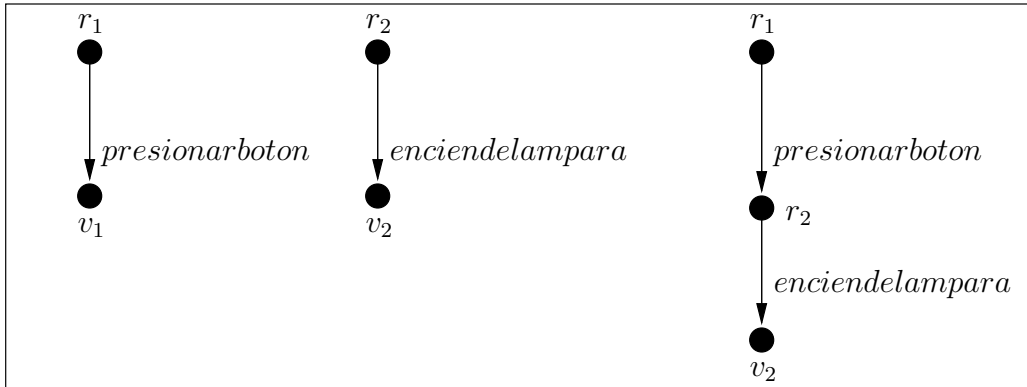


Figura 3.6: Grafo de composición secuencial de procesos

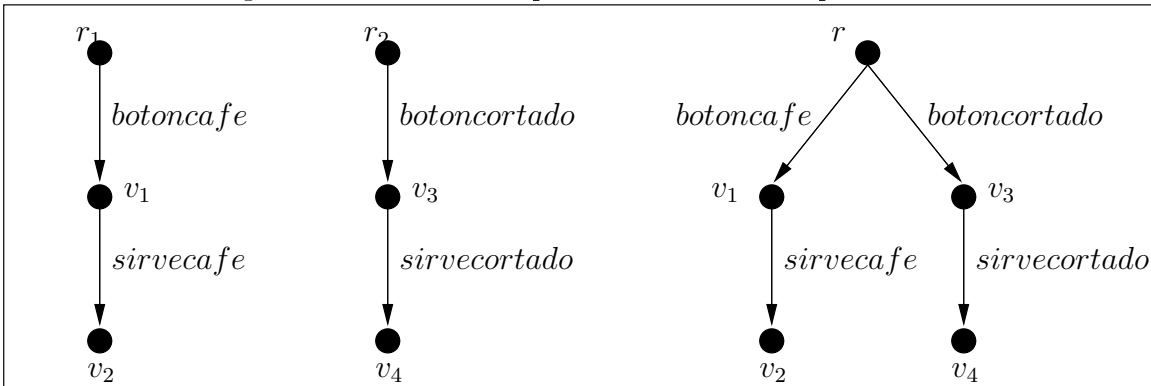


Figura 3.7: Grafo de composición alternativa de procesos

### 3.2.3. Axiomas para $\mathcal{BPA}$

El Cuadro 3.1 presenta la axiomatización de  $\mathcal{BPA}$  módulo equivalencia de bisimulación. Las variables  $x, y$  y  $z$  en los axiomas toman valores de la colección de términos de procesos básicos. La relación de igualdad  $=$  inducida sobre los términos básicos por la axiomatización cumple dos propiedades importantes respecto de la bisimulación:

1. La relación de igualdad es consistente, esto significa que si  $s = t$  se cumple para términos de procesos básicos  $s$  y  $t$ , entonces  $s \sim t$ ;
2. La relación de igualdad es completa, esto significa que si  $s \sim t$  se cumple para términos de procesos básicos  $s$  y  $t$ , entonces  $s = t$ ;

La consistencia asegura que si dos o más términos pueden ser igualados, entonces están en la misma clase de equivalencia de bisimulación; mientras que la completitud asegura que términos bisimilares pueden ser igualados.

$\mathcal{BPA}$			
$x, y, z;$			
	$x + y$	$=$	$y + x$ A1
	$x + (y + z)$	$=$	$(x + y) + z$ A2
	$x + x$	$=$	$x$ A3
	$(x + y).z$	$=$	$x.z + y.z$ A4
	$(x.y).z$	$=$	$x.(y.z)$ A5

Cuadro 3.1: La teoría ecuacional  $\mathcal{BPA} = (\Sigma_{\mathcal{BPA}}, \mathcal{E}_{\mathcal{BPA}})$

El axioma A1 expresa la conmutatividad de la composición alternativa. Establece que la elección entre  $x$  e  $y$  es lo mismo que la elección entre  $y$  y  $x$ . El axioma A2 expresa la asociatividad de la composición alternativa: nos dice que elegir primero entre  $x$  e  $(y + z)$  y luego entre  $y$  y  $z$  es lo mismo que elegir primero entre  $(x + y)$  y  $z$  y posteriormente entre  $x$  e  $y$ . El axioma A3 expresa la idempotencia de la composición alternativa: la elección entre dos instancias de un mismo proceso para su ejecución es lo mismo que su ejecución sin la posibilidad de elegir. El axioma A4 expresa la distributividad a derecha de la composición secuencial sobre la composición alternativa: una elección entre  $x$  e  $y$  seguido por  $z$  es lo mismo que una elección entre  $x$  seguido por  $z$  e  $y$  seguido por  $z$ . El axioma A5 expresa la asociatividad de la composición secuencial: nos dice que  $(x.y)$  seguido por  $z$  es lo mismo que ejecutar primero  $x$  seguido de  $(y.z)$ . No se incluye la distributividad a izquierda dado que, cuando llevamos los términos de la ecuación al modelo, no existe una relación de bisimulación entre sus respectivos grafos.

La relación de igualdad que los axiomas inducen sobre  $\mathcal{BPA}$  es cerrada bajo contextos. Entonces, para concluir que esta relación de igualdad es consistente y completa para  $\mathcal{BPA}$  módulo bisimulación, necesitamos conocer que esta equivalencia es una congruencia con respecto a  $\mathcal{BPA}$ . Es decir, si  $s \sim s'$  y  $t \sim t'$ , entonces  $s + t \sim s' + t'$  y  $s.t \sim s'.t'$ . La prueba del siguiente teorema puede encontrarse en [Fok00].

**Teorema 1.** *La equivalencia de bisimulación es una congruencia con respecto a  $\mathcal{BPA}$ .*

### 3.3. Extensión de $\mathcal{BPA}$ a $\mathcal{BPA}^*$

Kleene [Kle56] introdujo el operador de iteración binario  $*$  en el contexto de los autómatas finitos. Formuló algunas leyes algebraicas para este operador, en particular la ecuación

de definición para la estrella binaria de Kleene  $*$ :

$$x^*y = x.x^*y + y$$

Donde  $\cdot$  modela la composición secuencial y  $+$  modela la elección no determinista ( $\cdot$  liga más fuerte que  $+$ ). Intuitivamente, la expresión  $x^*y$  puede elegir ejecutar o bien  $x$ , luego del cual vuelve nuevamente a  $x^*y$ , o ejecutar  $y$ , después del cual termina. Si  $p_1$  y  $p_2$  son términos de proceso de  $\mathcal{BPA}^*$ , el grafo del término  $p_1^*p_2$  se obtiene agregando una nueva raíz junto con las transiciones hacia los nodos de los grafos de  $p_1$  y  $p_2$  según cada caso; y quitando los nodos finales de  $p_1$  para reemplazar todas las transiciones que van hacia nodos finales en  $p_1$  por transiciones que vayan hacia la nueva raíz. En  $\mathcal{BPA}^*$  el grafo de proceso de la composición secuencial de dos grafos no se construye igual que en  $\mathcal{BPA}$ , sino de la siguiente forma: si  $p_1$  y  $p_2$  son términos de proceso de  $\mathcal{BPA}^*$ , el grafo del término  $p_1 + p_2$  se obtiene agregando una nueva raíz junto con las transiciones hacia los nodos de los grafos de  $p_1$  y  $p_2$  según cada caso. En la Figura 3.8 podemos ver los esquemas de los grafos de proceso del operador de iteración y de la composición secuencial.

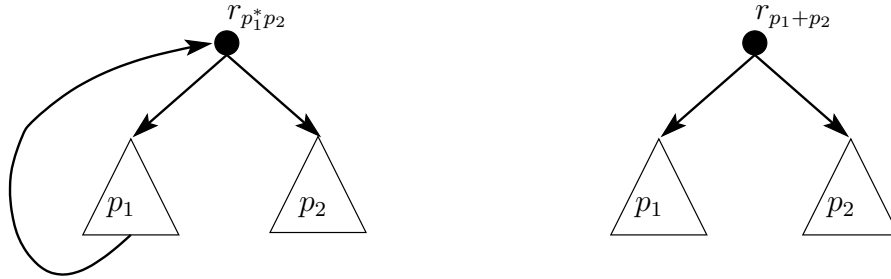


Figura 3.8: Esquemas de construcción de grafos con operadores principales  $*$  y  $+$

Bergstra, Bethke y Ponse [BBP94] incorporaron la estrella binaria de Kleene en el Álgebra básica de procesos ( $\mathcal{BPA}$ ). Ellos sugirieron tres axiomas  $BKS1-3$  para  $\mathcal{BPA}^*$ , donde el axioma  $BKS1$  es el axioma de definición dado por Kleene, mientras que su axioma más avanzado es  $BKS3$  originado desde Troeger [Tro93]:

$$x^*(y((x + y)^*z) + z) = (x + y)^*z$$

La signatura  $\Sigma(\mathcal{BPA}^*)$  se compone de las constantes  $a, b, c, \dots$  pertenecientes al conjunto de acciones atómicas  $A$ , los operadores binarios  $+$  y  $\cdot$  de  $\mathcal{BPA}$  y el nuevo operador de iteración binario  $*$ . El conjunto de axiomas de  $\mathcal{BPA}^*$  incluye tres nuevas ecuaciones  $BKS1-3$  sobre la *estrella binaria de Kleene*, además de los axiomas de  $\mathcal{BPA}$ , quedando de esta forma el sistema presentado en el Cuadro 3.2. Las variables  $x, y$  y  $z$  en los axiomas toman valores de la colección de términos de procesos básicos.

El axioma  $BKS1$  es la ecuación de definición del operador estrella. Este axioma introduce un desplegado (unfoldig) en la operación de iteración. El axioma  $BKS2$  expresa que es lo mismo iterar  $x$  y seguir con la composición secuencial de  $y$  con  $z$  que la composición secuencial de iterar  $x$  seguido de  $y$  con  $z$ . El axioma  $BKS3$  expresa que el proceso que itera sobre la elección entre  $x$  e  $y$  y continua con  $z$  es lo mismo que iterar  $x$  seguido de la elección entre ejecutar la composición secuencial de  $y$  con el proceso mencionado o ejecutar  $z$ .

$\mathcal{BPA}^*$

$x, y, z;$

---

$$\begin{array}{rcll} x + y & = & y + x & A1 \\ x + (y + z) & = & (x + y) + z & A2 \\ x + x & = & x & A3 \\ (x + y).z & = & x.z + y.z & A4 \\ (x.y).z & = & x.(y.z) & A5 \\ x.(x^*y) + y & = & x^*y & BKS1 \\ x^*(y.z) & = & (x^*y).z & BKS2 \\ x^*(y((x + y)^*z) + z) & = & (x + y)^*z & BKS3 \end{array}$$

---

Cuadro 3.2: La teoría ecuacional  $\mathcal{BPA}^* = (\Sigma_{\mathcal{BPA}^*}, \mathcal{E}_{\mathcal{BPA}^*})$

**Proposición 2.** *La siguiente igualdad es verdadera en la teoría  $\mathcal{BPA}^*$  y expresa que aplicar el operador estrella en forma anidada al mismo proceso se reduce a aplicarlo una sola vez:*

$$x^*(x^*y) = x^*y$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned} x^*(x^*y) &= x^*(x.(x^*y) + y) && (BKS1) \\ &= x^*(x.((x + x)^*y) + y) && (A3) \\ &= (x + x)^*y && (BKS3) \\ &= x^*y && (A3) \end{aligned}$$

## Capítulo 4

# Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración $pr\mathcal{BPA}^*$ : Sintaxis y semántica

En [BBS95] Baeten, Bergstra y Smolka presentan el álgebra  $pr\mathcal{BPA}$ , la versión probabilista del álgebra  $\mathcal{BPA}$ . El álgebra  $pr\mathcal{BPA}$  toma los operadores del álgebra básica  $\mathcal{BPA}$ :  $\cdot$  y  $+$ ; y les agrega probabilidades. Obteniendo de esta forma los operadores de composición secuencial  $\cdot$  y composición alternativa probabilista  $+_\pi$  donde  $\pi$  es una medida de probabilidad perteneciente al intervalo abierto  $(0, 1)$ . Es decir que el no determinismo del operador de composición alternativa  $+$  de  $\mathcal{BPA}$  pasa a determinarse con las probabilidades.

Por otra parte, Bergstra, Fokkink y Ponse en [BFP] toman el operador estrella  $*$  de Kleene [Kle56] e introducen una axiomatización para este operador. Extendiendo de esta forma el álgebra  $\mathcal{BPA}$  a  $\mathcal{BPA}^*$ . Nuestro trabajo pretende entender el álgebra  $pr\mathcal{BPA}$  con una versión probabilista del operador  $*$  denominada  $*_\pi$  con  $\pi \in (0, 1)$ , que tendrá como resultado el álgebra  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Esta álgebra pretende ser una herramienta para modelar, en especial, procesos estocásticos con comportamiento iterativo, el cual es capturado con el nuevo operador de iteración probabilista  $*_\pi$ . Como dijimos anteriormente,  $pr\mathcal{BPA}^*$  es una extensión de  $pr\mathcal{BPA}$ ; es decir que tomamos los operadores y axiomas de  $pr\mathcal{BPA}$  y agregamos el operador  $*_\pi$  con  $\pi \in (0, 1)$  y los axiomas que formalizan su funcionamiento. A estos axiomas los obtuvimos trabajando sobre los axiomas del operador  $*$  del álgebra  $\mathcal{BPA}^*$  para agregarles probabilidades.

En este capítulo comenzaremos a desarrollar nuestro trabajo principal, el de encontrar una axiomatización consistente para  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Para demostrar la consistencia de nuestra álgebra planteamos un modelo llamado *Modelo de grafos de procesos probabilistas* siguiendo el desalloyo presentado por Baeten, Bergstra y Smolka [BBS95]. Este es un modelo generativo de procesos probabilistas, por lo que resulta conveniente comenzar el capítulo con una breve explicación de los modelos generativos. Luego introduciremos la sintaxis de  $pr\mathcal{BPA}^*$ , es decir el conjunto de términos de la teoría, definiendo su signatura. Continuaremos el capítulo presentando el modelo de grafos de procesos probabilistas y definiremos la semántica del álgebra. Como relación de igualdad entre dos elementos del modelo usaremos la relación de bisimulación probabilista, introduciremos su definición y demostraremos que es una congruencia para, más adelante, poder usar este resultado en la prueba de consistencia del álgebra.



## 4.1. Modelo generativo de procesos probabilistas

Glabbeek, Smolka y Steffen en [vGSS95] proponen tres modelos de procesos probabilísticos: el reactivo, el generativo y el estratificado. Estos modelos son investigados dentro del contexto de PCCS (Probabilistic Calculus of Communicating Systems), una extensión de SCCS (Synchronous Calculus of Communicating Systems) de Milner en la cual a cada sumando de una expresión de suma de procesos se le asigna una probabilidad y la suma de estas probabilidades es 1. Una forma clara y sencilla para explicar el modelo generativo es comparándolo con otro modelo de procesos probabilistas llamado reactivo.

Un modelo generativo es aquel en donde los valores probabilistas de las transiciones salientes de un mismo estado están dados por una única distribución de probabilidad, independientemente de cual fuera su etiqueta. De este modo, las elecciones que involucran acciones posiblemente diferentes son resueltas probabilísticamente. Por ejemplo: un entorno que presenta varios botones, donde un observador puede presionarlos a todos a la vez y el proceso decidirá, de acuerdo a una distribución de probabilidad prescripta, cuál botón será activado. Esta misma distribución de probabilidad, condicionada por la elección del botón que realiza el proceso, gobernará las transiciones de estado internas que ocurran durante la ejecución del proceso. En contraste, en el modelo reactivo a cada una de las diferentes acciones se le asocia una distribución de probabilidad propia, distinta; y las elecciones que involucran diferentes acciones son resueltas por el entorno. En el modelo reactivo, el entorno puede ofrecer solamente una acción cada vez, como por ejemplo presionar uno de varios botones que el proceso posee como su interfaz al mundo. Una propiedad del modelo generativo es que, a diferencia del reactivo, las probabilidades de las acciones son condicionales con respecto al grupo de acciones aceptadas por el entorno.

**Ejemplo 18.** (*Modelo generativo*) Modelemos el juego de tirar una moneda y ver qué lado sale. A uno de los lados de la moneda llamaremos cara y al otro seca. Cada lado de la moneda tiene una probabilidad de  $\frac{1}{2}$  de salir. En la Figura 4.1 podemos ver el grafo de este proceso.

**Ejemplo 19.** (*Modelo generativo*) Modelemos el juego de tirar un dado común y ver qué número sale. Dado que tenemos 6 números posibles, cada cara del dado tiene una probabilidad de  $\frac{1}{6}$  de salir. En la Figura 4.2 podemos ver el grafo de este proceso.

**Ejemplo 20.** (*Modelo generativo*) Una máquina tragamonedas de un casino muestra tres figuras en su pantalla. Estas figuras pueden ser una manzana, una pera y una banana. Un observador acciona una palanca y las figuras comienzan a cambiar, siempre entre las frutas mencionadas. Al cabo de unos segundos las figuras se detienen, quedando en la pantalla tres nuevas figuras. Si las tres frutas coinciden el observador gana, es decir que el observador puede ganar en tres casos: si salen todas manzanas, si salen todas peras o si salen todas bananas. Por lo que podemos ver que la probabilidad de ganar es de  $\frac{3}{27}$ . En la Figura 4.3 podemos ver el grafo de este proceso.

**Ejemplo 21.** (*Modelo reactivo*) Supongamos un cajero automático que ofrece los servicios de extracción y consulta de saldo. Supongamos además que 25% de las veces el cajero no tiene dinero. En la Figura 4.4 podemos ver el grafo de este proceso. Observemos en este ejemplo que al comienzo del proceso el usuario es quien decide que acción ejecutar entre las acciones disponibles; y el sistema reacciona de acuerdo a dicha elección y a una distribución de probabilidades asociada a cada acción.

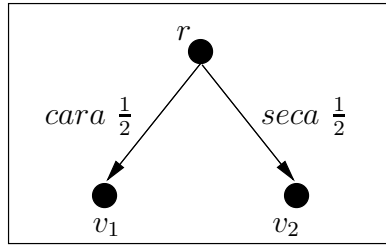


Figura 4.1: Grafo que modela la tirada de una moneda: Modelo generativo

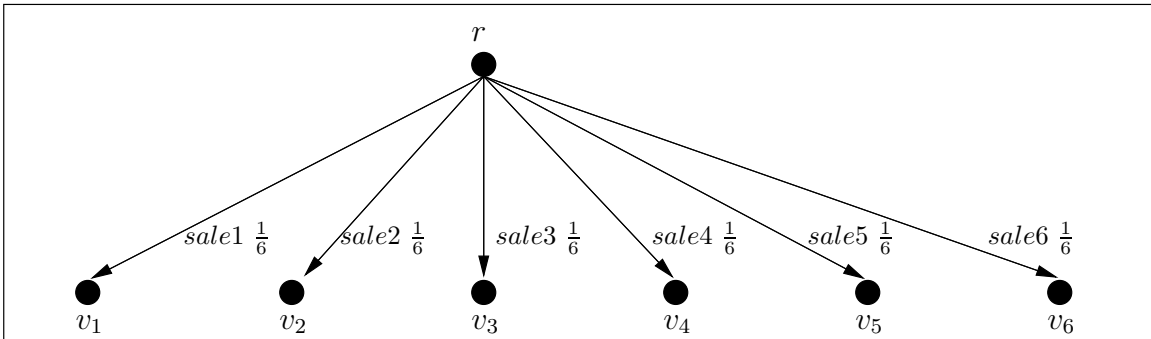


Figura 4.2: Grafo que modela la tirada de un dado: Modelo generativo

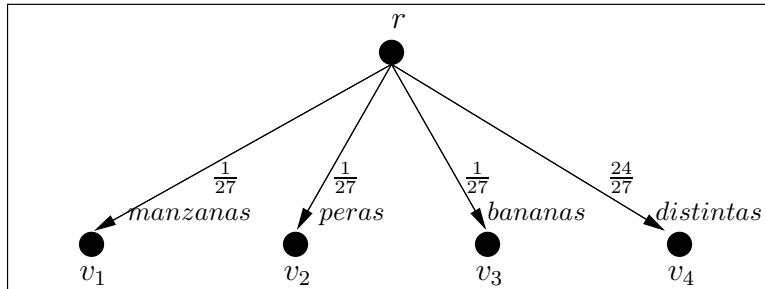


Figura 4.3: Grafo que modela el funcionamiento de una máquina tragamonedas: Modelo generativo

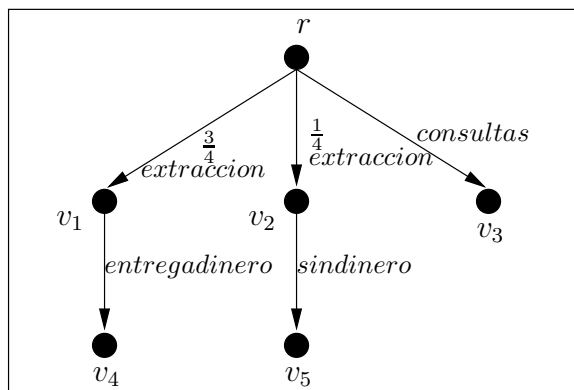


Figura 4.4: Grafo que modela el funcionamiento de cajero automático: Modelo reactivo

## 4.2. Signatura de $pr\mathcal{BPA}^*$

La signatura  $\Sigma(pr\mathcal{BPA}^*)$  contiene cuatro tipos de operadores: procesos constantes  $a$  por cada acción atómica  $a$ , el operador de composición secuencial ".", el operador de composición alternativa probabilista "+ $\pi$ ", y el operador de iteración probabilista "\* $\pi$ ". El conjunto de todos los procesos constantes se denota con  $A$ .

**Definición 19.** La signatura  $\Sigma(pr\mathcal{BPA}^*)$  contiene las constantes  $a \in A$  y los operadores binarios  $(+\pi)_{\pi \in (0,1)}$ ,  $\cdot$  y  $(*\pi)_{\pi \in (0,1)}$ .

Las constantes  $a, b, c, \dots$  son las acciones atómicas y, al igual que en  $\mathcal{BPA}$ , representan comportamiento indivisible. Intuitivamente, la expresión  $x +_{\pi} y$  representa el proceso que ejecuta  $x$  con probabilidad  $\pi$  o  $y$  con probabilidad  $1 - \pi$  pero no ambos; la expresión  $x.y$  representa el proceso que primero ejecuta  $x$  y, cuando este finaliza, comienza  $y$ ; y la expresión  $x^{*\pi}y$  representa el proceso que ejecuta  $x$  con probabilidad  $\pi$  y cuando termina vuelve al estado  $x^{*\pi}y$  nuevamente; o ejecuta  $y$  con probabilidad  $1 - \pi$  y cuando este se completa entonces el proceso entero termina. La composición alternativa probabilista y la iteración probabilista son generativas.

**Ejemplo 22.** El siguiente término de proceso modela el juego del Ejemplo 18:

$$\text{Moneda} = \text{cara} +_{\frac{1}{2}} \text{seca}$$

Las acciones atómicas *cara* y *seca* representan el hecho de que al tirar la moneda salga cara o salga seca respectivamente.

**Ejemplo 23.** El siguiente término de proceso modela el juego del Ejemplo 19:

$$\text{Dado} = \text{sale1} +_{\frac{1}{6}} \left( \text{sale2} +_{\frac{1}{5}} \left( \text{sale3} +_{\frac{1}{4}} \left( \text{sale4} +_{\frac{1}{3}} \left( \text{sale5} +_{\frac{1}{2}} \text{sale6} \right) \right) \right) \right)$$

Las acciones atómicas *sale1*, *sale2*, *sale3*, etc. significan que al tirar el dado sale el número uno, sale el número dos, sale el número tres, etc. respectivamente.

**Ejemplo 24.** Modelamos el funcionamiento del juego del ejemplo 20 con el siguiente término de proceso:

$$\text{Tragamonedas} = \left( (\text{manzanas} +_{\frac{1}{2}} \text{peras}) +_{\frac{2}{3}} \text{bananbas} \right) +_{\frac{3}{27}} \text{distintas}$$

Las acciones atómicas *manzanas*, *peras*, y *bananas* significan que en la pantalla aparecen 3 manzanas, 3 peras o 3 bananas respectivamente y la acción atómica *distintas* significa que en la pantalla no aparecen 3 frutas iguales.

**Ejemplo 25.** Supongamos que tenemos un control remoto con batería baja cuyos botones, a menudo, debemos presionar varias veces para conseguir los cambios deseados. Queremos modelar el proceso de encender un televisor con este control remoto. Asumamos que la probabilidad de encendido es  $\pi$ , es decir, presionamos el botón de encendido y con una probabilidad  $\pi$  el televisor encenderá o con una probabilidad  $1 - \pi$  necesitaremos volver a presionar el botón de encendido. Podríamos representar dicho proceso con el siguiente término:

$$\text{ControlRemoto} = \text{encender} \cdot (\text{encender}^{*\pi} \text{encendido})$$

Como podemos observar, el término es una composición de las acciones atómicas encender y encendido. Este proceso intuitivamente significa "presionar el botón encender hasta que el televisor enciende"(con una probabilidad  $\pi$ ).

**Ejemplo 26.** Colocar ejemplo de modelar un dado con una moneda.

$$\text{MonedaDado} = (\text{cara.cara.cara} + \frac{1}{2} \text{seca.seca.seca})^{\frac{1}{4}} (\text{cara.cara.seca.seis} + \frac{1}{6} (\text{cara.seca.cara.cinco} + \frac{1}{5} (\text{cara.seca.seca.cuatro} + \frac{1}{4} (\text{seca.cara.cara.tres} + \frac{1}{3} (\text{seca.cara.seca.dos} + \frac{1}{2} \text{seca.seca.cara.uno}))))))$$

**Ejemplo 27.** Consideremos la reproducción de una célula animal sana a través del mecanismo de mitosis, donde la célula madre origina 2 células hijas iguales a ella, con igual número de cromosomas. Supongamos que queremos modelar el proceso que muestra cómo luego de varias reproducciones, en algún momento, una célula muta y se vuelve cancerígena. Tomemos las acciones atómicas: buena y mala que significan que se origina una célula sana y que se origina una célula cancerígena respectivamente. Modelamos esto con el siguiente proceso:

$$\text{ReproduccionCelular} = \text{buena}^{*\pi} \text{mala}$$

### 4.3. Modelo de grafos probabilistas

En esta sección definimos la semántica de  $pr\mathcal{BPA}$  en términos de grafos de proceso. En primer lugar construimos un modelo para nuestra álgebra, el *Modelo de grafos probabilistas*, y luego damos la interpretación semántica de los operadores del álgebra en el modelo propuesto.

Un *grafo de procesos probabilista* es un *grafo de proceso* donde las etiquetas además de indicar el nombre de una acción también indican su probabilidad de ocurrir. Una función de distribución asigna la probabilidad de ocurrencia a cada acción siguiendo el modelo generativo, es decir que en cada nodo la suma de las probabilidades de todas las transiciones de salida debe ser 1 y si el nodo no tiene transiciones de salida la suma es cero. Dado  $A$  un conjunto de acciones atómicas y dado  $N$  un conjunto infinito y contable de nodos (o estados), consideramos grafos de proceso con etiquetas en  $A$  y nodos en  $N$  y damos la siguiente definición formal:

**Definición 20.** Un grafo de proceso probabilista  $g$  es una tupla  $\langle V, r, \mu \rangle$  tal que

- $V \subseteq N$  es el conjunto de nodos de  $g$
- $r \in V$  es la raíz de  $g$
- $\mu : (V \times A \times V) \rightarrow [0, 1]$ , es la función de distribución de transiciones de  $g$ , es una función total que satisface la siguiente condición:  
 $\forall v \in V \sum_{a \in A, v' \in V} \mu(v, a, v') \in \{0, 1\}$

El significado intencional de  $\mu(v, a, v') = \pi$  es que el nodo  $v$  puede ejecutar una transición  $a$  al nodo  $v'$  con probabilidad  $\pi$ . La condición que debe cumplir la función  $\mu$  nos dice que para cada uno de los nodos la suma de las probabilidades de todas las transiciones de salida

del nodo puede ser 1 o cero (si no tiene transiciones de salida). Más adelante usaremos el predicado  $endpoint(v)$ , el cual es verdadero si la suma anterior es cero.

**Ejemplo 28.** En la Figura 4.5 podemos ver el grafo de la expresión del Ejemplo 25 que modela parte del funcionamiento de un control remoto. Observemos que en el grafo las transiciones con valor de probabilidad cero no aparecen dibujadas, tampoco indicamos la probabilidad cuando es igual a 1. La función de distribución  $\mu$  está definida como sigue:

$$\begin{aligned}\mu(r, encender, v_1) &= 1 \\ \mu(v_1, encender, v_1) &= \pi \\ \mu(v_1, encendido, v_2) &= 1 - \pi\end{aligned}$$

los otros casos son iguales a 0.

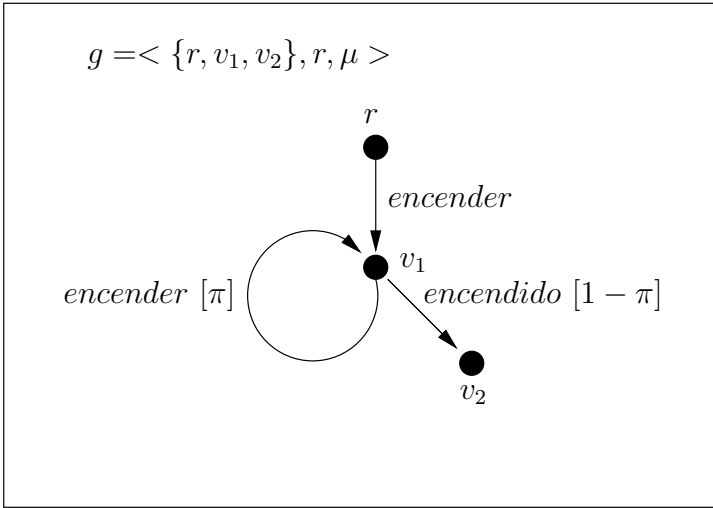


Figura 4.5: Grafo que modela parte del funcionamiento de un control remoto

### 4.3.1. Semántica del álgebra

Los términos en el álgebra de procesos carecen de significado. Para darles un significado en el "mundo real", construimos un modelo y luego definimos una interpretación que nos lleva de cada término del álgebra a un elemento del modelo. Dado que ya tenemos nuestro modelo planteado, nos queda por definir dicha interpretación, y lo haremos en forma inductiva sobre la construcción de los términos de proceso de nuestra álgebra.

**Definición 21.** Sean  $g_1$  y  $g_2$  los grafos de proceso probabilistas de los términos  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, tales que  $g_1 = \langle V_1, r_1, \mu_1 \rangle$ ,  $g_2 = \langle V_2, r_2, \mu_2 \rangle$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $A$  es el conjunto de acciones y  $N$  es el conjunto de Nodos. Los operadores  $a \in A$ ,  $+$ ,  $\pi$ ,  $\cdot$ , y  $^*$  están definidos como sigue:

- Un grafo representativo para  $a \in A$  está dado por  $\langle \{r, v\}, r, \mu \rangle$ , donde  $r \in N$  y  $\mu(r, a, v) = 1$  es la única transición con probabilidad distinta de cero.

- Denotamos al grafo del término  $t_1 +_\pi t_2$  con  $g_1 +_\pi g_2$  y lo definimos como  $\langle (V_1 \cup V_2 \cup \{r\}), r, \mu \rangle$  donde  $r \in N - (V_1 \cup V_2)$  y
 
$$\begin{aligned} \mu(r, a, v') &= \pi \cdot \mu_1(r_1, a, v') && \text{si } v' \in V_1 \\ \mu(r, a, v') &= (1 - \pi) \cdot \mu_2(r_2, a, v') && \text{si } v' \in V_2 \\ \mu(v, a, v') &= \mu_1(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_1 \\ \mu(v, a, v') &= \mu_2(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_2 \\ \mu(v, a, v') &= 0 && \text{en otro caso} \end{aligned}$$
- Denotamos al grafo del término  $t_1.t_2$  con  $g_1.g_2$  y lo definimos como  $\langle ((V_1 \cup V_2) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\}), r_1, \mu \rangle$  donde
 
$$\begin{aligned} \mu(v, a, v') &= \mu_1(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_1 \wedge \text{not}(\text{endpoint}(v')) \\ \mu(v, a, r_2) &= \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(v, a, v') && \text{si } v \in V_1 \\ \mu(v, a, v') &= \mu_2(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_2 \\ \mu(v, a, v') &= 0 && \text{en otro caso} \end{aligned}$$
- Denotamos al grafo del término  $t_1^{*\pi} t_2$  con  $g_1^{*\pi} g_2$  y lo definimos como  $\langle ((V_1 \cup V_2 \cup \{r\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\}), r, \mu \rangle$  donde  $r \in N - (V_1 \cup V_2)$  y
 
$$\begin{aligned} \mu(r, a, v') &= \pi \cdot \mu_1(r_1, a, v') && \text{si } v' \in V_1, \text{not}(\text{endpoint}(v')) \\ \mu(r, a, v') &= (1 - \pi) \cdot \mu_2(r_2, a, v') && \text{si } v' \in V_2 \\ \mu(r, a, r) &= \pi \cdot \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(r_1, a, v') \\ \mu(v, a, r) &= \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(v, a, v') && \text{si } v \in V_1 \\ \mu(v, a, v') &= \mu_1(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_1, \text{not}(\text{endpoint}(v')) \\ \mu(v, a, v') &= \mu_2(v, a, v') && \text{si } v, v' \in V_2 \\ \mu(v, a, v') &= 0 && \text{en otro caso} \end{aligned}$$

**Ejemplo 29.** (Acción atómica) La Figura 4.6 nos muestra un grafo que representa la ejecución de una acción  $a$  con probabilidad 1; es decir, tiene sólo una transición distinta de cero (la única que aparece en el dibujo) y el resto de las transiciones son iguales a cero, definiendo de esta forma la función de distribución de transiciones  $\mu$ :

$$\mu(r, a, v) = 1$$

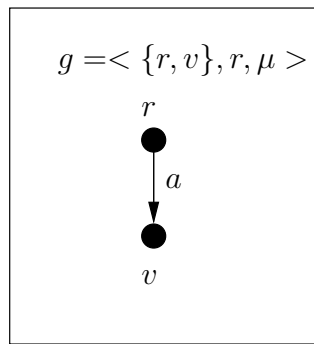


Figura 4.6: Ejecución de una acción

**Ejemplo 30.** (Composición alternativa  $+_\pi$ ) En la Figura 4.7 tenemos dos grafos de proceso a los cuales les aplicamos el operador de composición alternativa probabilista obteniendo

el grafo de la Figura 4.8. Con la primera y segunda ecuación de la definición introducimos el unfolding indicado por el área con línea de puntos. Los demás casos de la función de distribución  $\mu$  tienen los mismos valores que en los grafos originales. Dado que el nodo  $r_2$  no es alcanzable desde la raíz, entonces podemos decir que el grafo de la Figura 4.8 se comporta igual que el grafo de la Figura 4.9. El cálculo de los valores de  $\mu$  según la definición es el siguiente (sólo escribiremos los que son distintos de cero):

$$\begin{aligned}
\mu(r, h, r_1) &= \frac{3}{4} \cdot \mu_1(r_1, h, r_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
\mu(r, t, v_1) &= \frac{3}{4} \cdot \mu_1(r_1, t, v_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
\mu(r, b, v_2) &= \frac{1}{4} \cdot \mu_2(r_2, b, v_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \\
\mu(r, a, v_3) &= \frac{1}{4} \cdot \mu_2(r_2, a, v_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{24} \\
\mu(r_1, h, r_1) &= \mu_1(r_1, h, r_1) = \frac{1}{2} \\
\mu(r_1, t, v_1) &= \mu_1(r_1, t, v_1) = \frac{1}{2} \\
\mu(r_2, b, v_2) &= \mu_2(r_2, b, v_2) = \frac{1}{6} \\
\mu(r_2, a, v_3) &= \mu_2(r_2, a, v_3) = \frac{5}{6} \\
\mu(v_3, a, v_4) &= \mu_2(v_3, a, v_4) = 1
\end{aligned}$$

**Ejemplo 31.** (Composición secuencial) En la Figura 4.10 tenemos dos grafos de proceso a los cuales les aplicamos el operador de composición secuencial obteniendo el grafo de la Figura 4.11. La primera ecuación de la definición nos indica que debemos tener cuidado con los endpoints del primer grafo. La sumatoria de la segunda ecuación une las transiciones que van a endpoints con la misma acción y suma sus probabilidades. Los demás casos de la función de distribución  $\mu$  tienen los mismos valores que en los grafos originales. El cálculo de los valores de  $\mu$  según la definición es el siguiente (sólo escribiremos los que son distintos de cero):

$$\begin{aligned}
\mu(r_1, b, v_3) &= \mu_1(r_1, b, v_3) = \frac{1}{3} \\
\mu(r_1, a, r_2) &= \mu_1(r_1, a, v_1) + \mu_1(r_1, a, v_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
\mu(v_3, c, r_2) &= \mu_1(v_3, c, v_4) = 1 \\
\mu(r_2, a, v_2) &= \mu_2(r_2, a, r_2) = \frac{3}{5} \\
\mu(r_2, c, v_5) &= \mu_2(r_2, c, v_5) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

**Ejemplo 32.** (Operador de iteración  $^*\pi$ ) En la Figura 4.12 tenemos dos grafos de proceso a los cuales les aplicamos el operador de iteración probabilista obteniendo el grafo de la Figura 4.13. Aquí también con las dos primeras ecuaciones introducimos el unfolding indicado por la línea de puntos. La tercera ecuación de la definición suma las transiciones que van a endpoints con la misma acción y contruye el bucle de la raíz. La cuarta ecuación hace lo mismo que la anterior, pero construye el segundo bucle. Los demás casos de la función de distribución  $\mu$  tienen los mismos valores que en los grafos originales. Dado que el nodo  $r_2$  no es alcanzable desde la raíz, entonces podemos decir que el grafo de la Figura 4.13 se comporta igual que el grafo de la Figura 4.14. El cálculo de los valores de  $\mu$  según la definición es el siguiente (sólo escribiremos los que son distintos de cero):

$$\begin{aligned}
\mu(r, a, r_1) &= \frac{1}{2} \cdot \mu_1(r_1, a, r_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \\
\mu(r, c, v_3) &= \frac{1}{2} \cdot \mu_2(r_2, c, v_3) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\
\mu(r, b, r) &= \frac{1}{2} \cdot (\mu_1(r_1, b, v_1) + \mu_1(r_1, b, v_2)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\
\mu(r_1, b, r) &= \mu_1(r_1, b, v_1) + \mu_1(r_1, b, v_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \\
\mu(r_1, a, r_1) &= \mu_1(r_1, a, r_1) = \frac{2}{5} \\
\mu(r_2, c, v_3) &= \mu_2(r_2, c, v_3) = 1
\end{aligned}$$

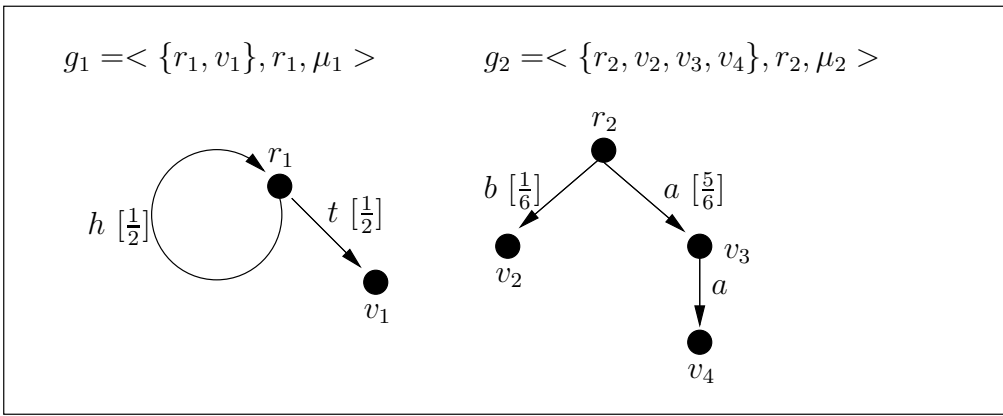


Figura 4.7: Ejemplo de composición alternativa de grafos

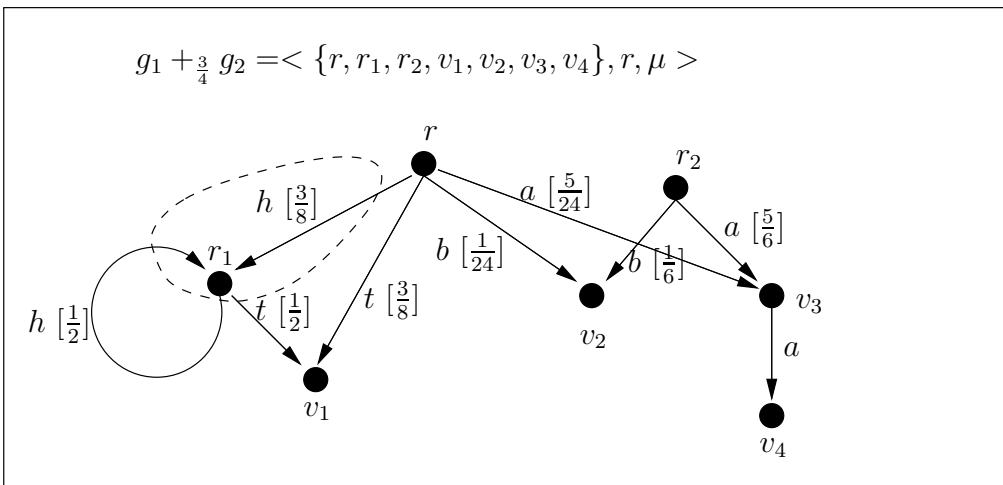


Figura 4.8: Ejemplo de composición alternativa de grafos

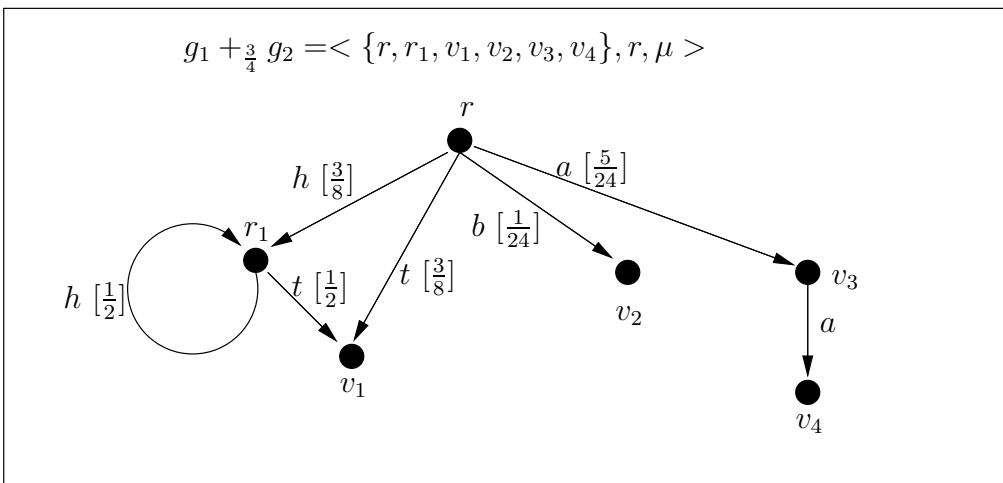


Figura 4.9: Ejemplo de composición alternativa de grafos



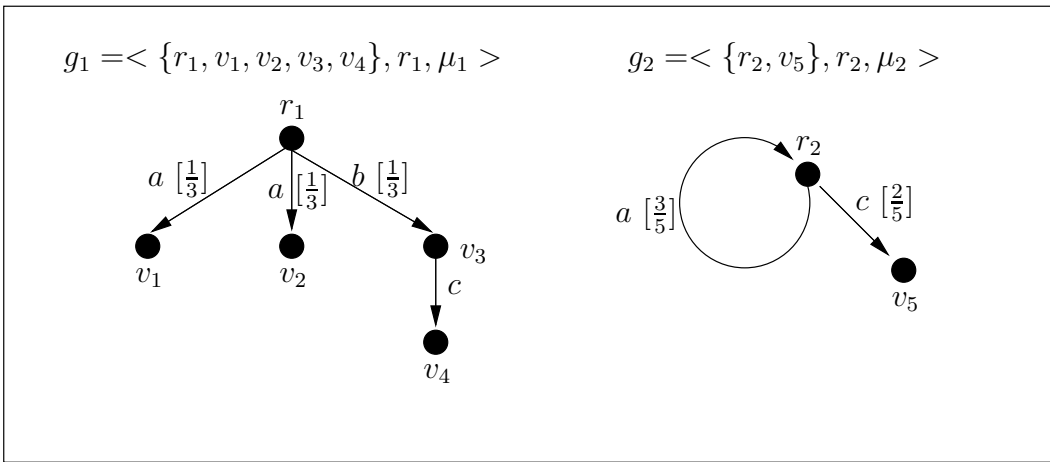


Figura 4.10: Ejemplo de composición secuencial

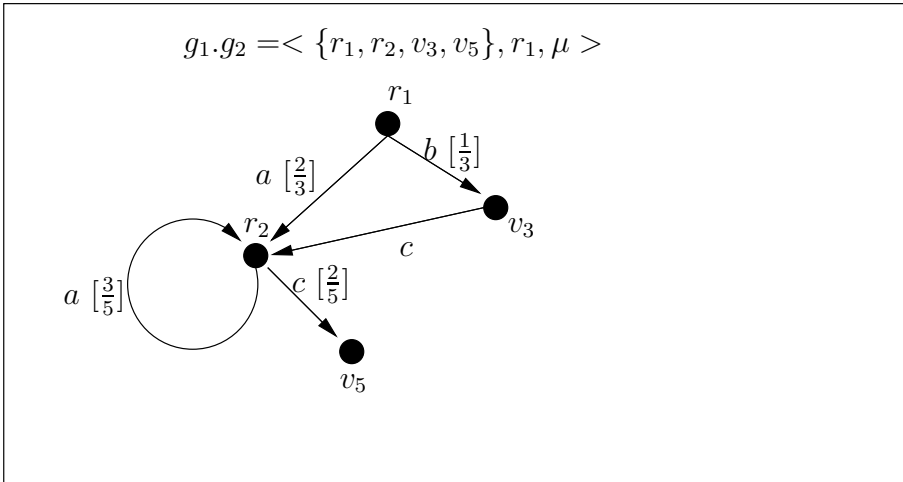


Figura 4.11: Ejemplo de composición secuencial

### 4.3.2. Bisimulación probabilista

La *bisimulación* es una relación de equivalencia usada frecuentemente para comparar procesos. Fue introducida por Larsen y Skou (1991) para los llamados sistemas de transición probabilistas reactivos. Luego fue adaptada a los modelos generativos por Baeten, Bergstra y Smolka [BBS95]. Nosotros adoptamos esta relación para usarla como relación de igualdad en nuestro modelo de grafos de procesos probabilistas. La idea es que procesos equivalentes no sólo ejecutan las mismas secuencias de acciones sino que además tienen la misma probabilidad en la estructura de ramificación; esto quiere decir que los momentos en que ocurre una elección y la distribución de probabilidad asociada deben ser los mismos. Para ver esto usaremos los siguientes ejemplos:

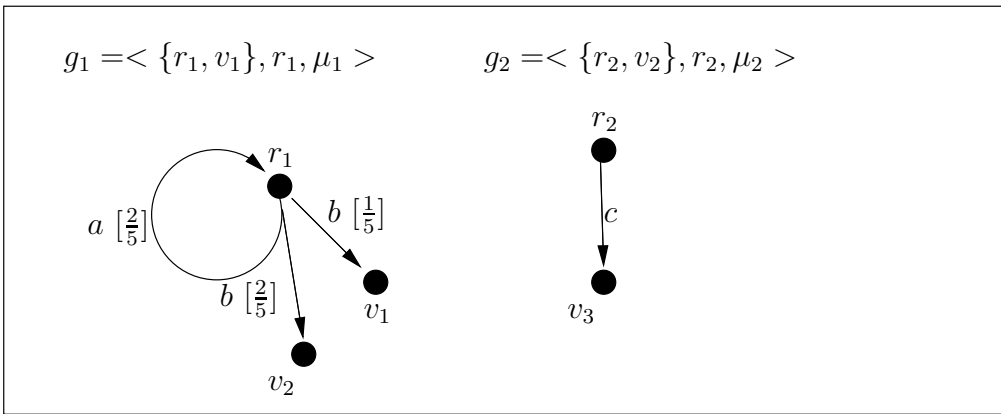


Figura 4.12: Ejemplo de iteración

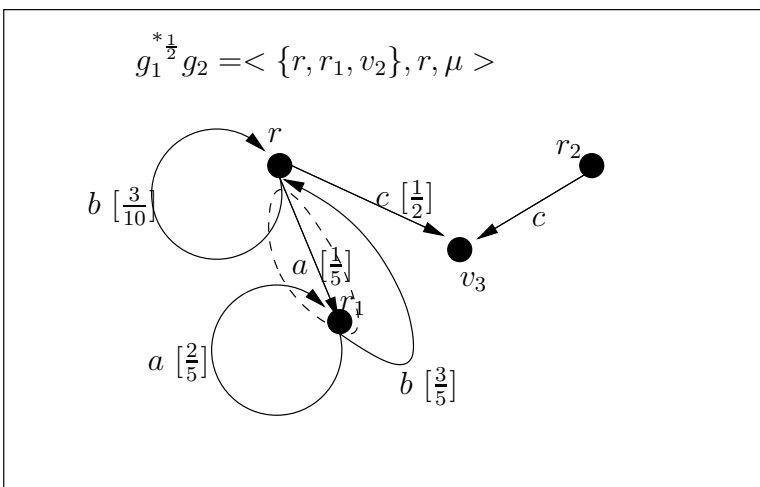


Figura 4.13: Ejemplo de iteración

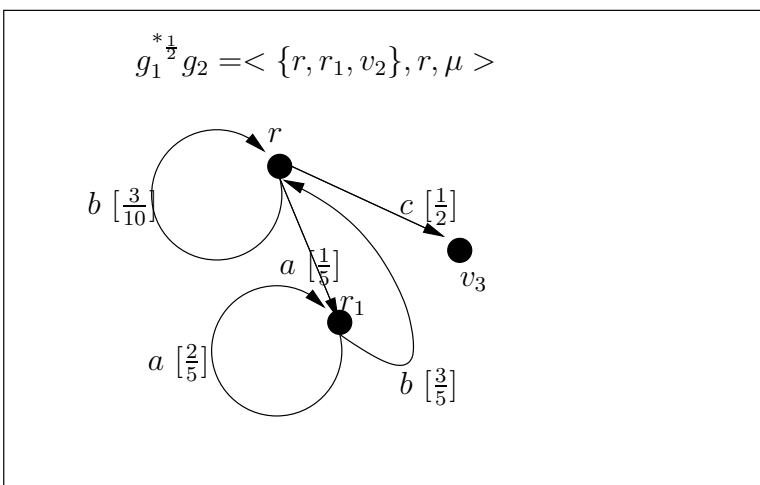


Figura 4.14: Ejemplo de iteración

**Ejemplo 33.** Los procesos  $a.(b + \frac{1}{2} c)$  y  $a.b + \frac{1}{2} a.c$  no tienen las mismas estructuras de ramificación porque en  $a.(b + \frac{1}{2} c)$  primero ejecuta  $a$  y luego realiza una elección entre  $b$  y  $c$ , mientras que en  $a.b + \frac{1}{2} a.c$  primero hace la elección y luego ejecuta el término elegido. Podemos ver que el momento de elección en los dos términos es diferente. En la Figura 4.15 se presentan los grafos del ejemplo.

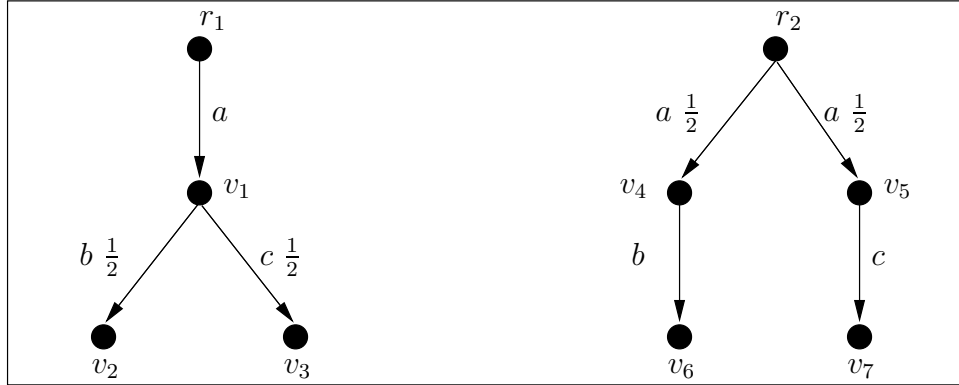


Figura 4.15: Grafos con distinta estructura de ramificación

**Ejemplo 34.** Si bien los procesos  $a + \frac{1}{3} d.(b + \frac{1}{4} c)$  y  $a + \frac{2}{5} d.(b + \frac{3}{4} c)$  poseen la misma estructura de ramificación, no se cumple que tengan las mismas distribuciones de probabilidad asociadas a cada nodo porque, mientras que el primer proceso partiendo desde el estado inicial puede ejecutar una acción  $a$  con probabilidad de  $\frac{1}{3}$ , el segundo proceso hace lo mismo pero con una probabilidad de  $\frac{2}{5}$ . En la Figura 4.16 se presentan los grafos del ejemplo.

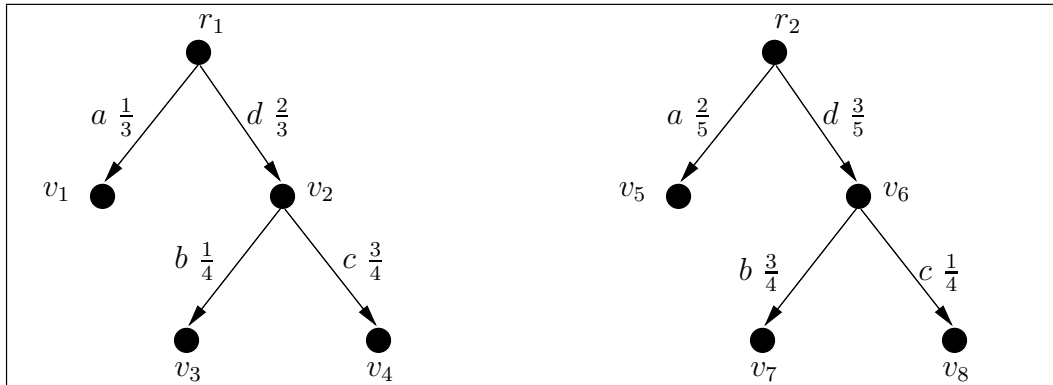


Figura 4.16: Grafos con distintas distribuciones de probabilidad asociadas a cada nodo

Con anterioridad se señaló que este trabajo usa la bisimulación como relación de equivalencia en el modelo de grafos. Y dado que nuestro modelo de grafos es probabilista, presentaremos la relación de bisimulación probabilista dada en [BBS95]. Además, para la prueba de consistencia del álgebra, nos resultará útil demostrar que dicha bisimulación es

una congruencia.

Para definir la bisimulación probabilista sobre procesos probabilistas generativos primero necesitamos elevar la definición de función de distribución de transiciones a conjuntos de estados como sigue:

$$\mu : (V \times A \times 2^V) \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } \mu(v, a, S) = \sum_{v' \in S} \mu(v, a, v')$$

Así  $\mu(v, a, S) = \rho$  significa que el nodo  $v$ , con probabilidad total  $\rho$ , puede ejecutar una transición  $a$  a algún nodo en  $S$ .

La siguiente definición muestra el concepto de bisimulación probabilista que usaremos como equivalencia en nuestro modelo, es decir, diremos que dos grafos son equivalentes si son probabilistamente bisimilares.

**Definición 22.** *Dados  $g_1 = \langle V_1, r_1, \mu_1 \rangle$ ,  $g_2 = \langle V_2, r_2, \mu_2 \rangle$  grafos de procesos probabilistas, una bisimulación probabilista entre  $g_1$  y  $g_2$  es una relación de equivalencia  $R \subseteq (V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$  con las siguientes propiedades:*

- $R(r_1, r_2)$
- $\forall v \in V_1, w \in V_2$  tal que  $R(v, w)$  se cumple  
 $\forall a \in A, S \in (V_1 \cup V_2)/R, \mu_1(v, a, S \cap V_1) = \mu_2(w, a, S \cap V_2)$

*Los grafos  $g_1$  y  $g_2$  son probabilistamente bisimilares, escribimos  $g_1 \sim^{pr} g_2$  si existe una bisimulación probabilista entre  $g_1$  y  $g_2$ .*

Intuitivamente, dos nodos son probabilistamente bisimilares si, para todas las acciones en  $A$ , ellos transitan a una clase de bisimulación probabilista con igual probabilidad. La intersección con  $V_1$  es necesaria ya que  $\mu_1$  toma como argumento tuplas cuyo tercer componente es un subconjunto de  $V_1$ .

**Ejemplo 35.** *Supongamos que tiramos una moneda y nos fijamos qué lado sale. Llamemos  $h$  a la acción de que salga cara y  $t$  a la de que salga seca; tenemos una probabilidad de  $\frac{1}{2}$  de que salga cara y de  $\frac{1}{2}$  de que salga seca. Supongamos además que tiramos un dado de seis lados y nos interesa saber si el número que sale es par o impar. Llamemos  $h$  a la acción de que salga número par y  $t$  a la de que salga impar. Dado que hay 3 números pares y 3 números impares tenemos una probabilidad de  $\frac{1}{2}$  de que salga un número par y de  $\frac{1}{2}$  de que sea impar. Además sabemos que cada cara del dado tiene una probabilidad de  $\frac{1}{6}$  de salir. Si modelamos en el procesos  $p_1$  la tirada de la moneda y en  $p_2$  la tirada del dado, vemos que los procesos son bisimilares, es decir, podemos encontrar una relación de bisimulación entre ellos. La Figura 4.17 nos muestra los grafos de estos procesos y una relación de bisimulación entre ellos.*

### 4.3.3. Congruencia

Para poder realizar la prueba de consistencia, es necesario demostrar que la bisimulación probabilista antes definida es una congruencia para los operadores de  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Es decir que la aplicación de los operadores a grafos bisimilares conserva la relación de bisimulación entre los grafos resultantes. Esto ya fue reportado en [BBS95] para los operadores

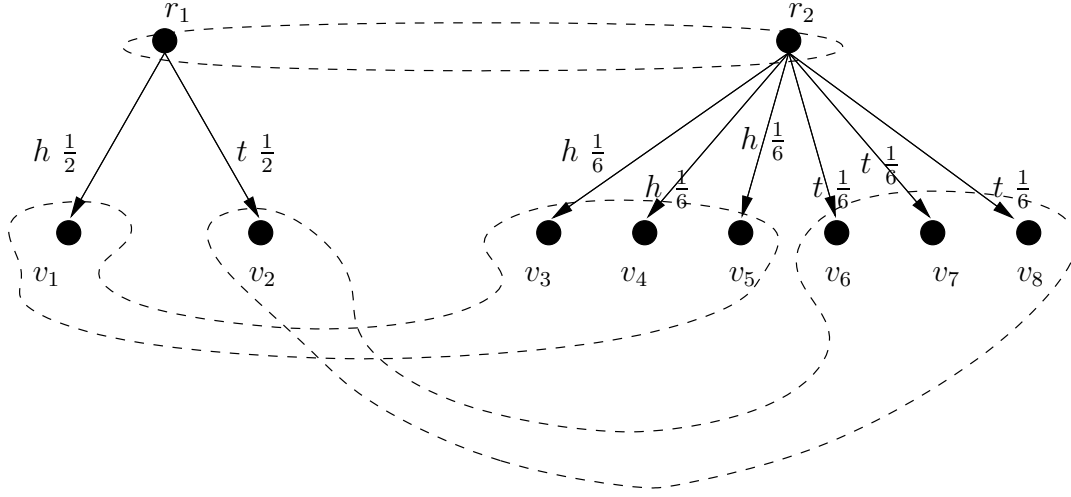


Figura 4.17: Relación de bisimulación entre dos procesos

$+_{\pi}$  y  $\cdot$ ; nosotros realizaremos la prueba de congruencia en este nuevo contexto para estos operadores como ejercicio y agregaremos la del operador  $^{*\pi}$ . Con la función  $Id(V)$  denotamos al conjunto  $\{(v, v) | v \in V\}$ .

**Proposición 3.** (Congruencia) Sean  $g$ ,  $g_1$  y  $g_2$  grafos de procesos probabilistas. Si  $g_1 \sim^{pr} g_2$ , entonces  $g +_{\pi} g_1 \sim^{pr} g +_{\pi} g_2$ ,  $g_1 +_{\pi} g \sim^{pr} g_2 +_{\pi} g$ ,  $g \cdot g_1 \sim^{pr} g \cdot g_2$ ,  $g_1 \cdot g \sim^{pr} g_2 \cdot g$ ,  $g^{*\pi} g_1 \sim^{pr} g^{*\pi} g_2$  y  $g_1^{*\pi} g \sim^{pr} g_2^{*\pi} g$ .

Prueba: Sean  $g = \langle V, r, \mu \rangle$ ,  $g_1 = \langle V_1, r_1, \mu_1 \rangle$  y  $g_2 = \langle V_2, r_2, \mu_2 \rangle$ . Asumimos que  $g_1 \sim^{pr} g_2$ . Por lo tanto, existe una bisimulación probabilista  $R$  entre  $g_1$  y  $g_2$ . Consideraremos cada operador en sucesión.

**Caso 1.** Para “ $+_{\pi}$ ” tenemos dos casos:  $g +_{\pi} g_1 \sim^{pr} g +_{\pi} g_2$  y  $g_1 +_{\pi} g \sim^{pr} g_2 +_{\pi} g$

**Subcaso 1.1.** ( $g +_{\pi} g_1 \sim^{pr} g +_{\pi} g_2$ )

Sea  $r_i^+$  la raíz y  $\mu_i^+$  la función de distribución de transiciones de  $g +_{\pi} g_i$ ,  $i = 1, 2$ . Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$$g +_{\pi} g_i = \langle V_i^+, r_i^+, \mu_i^+ \rangle, \quad i = 1, 2 \quad \text{donde } V_i^+ = V \cup V_i \cup \{r_i^+\}$$

La Figura 4.18 nos muestra un esquema de los grafos  $g +_{\pi} g_1$  y  $g +_{\pi} g_2$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la del medio es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$  y la inferior es la relación de bisimulación  $R$ .

Mostramos que

$$R^+ = \{(r_1^+, r_2^+), (r_2^+, r_1^+)\} \cup Id(V \cup \{r_1^+, r_2^+\}) \cup R$$

es una bisimulación probabilista entre  $g +_{\pi} g_1$  y  $g +_{\pi} g_2$ . Primero notemos que como  $R$  es una relación de equivalencia entonces  $R^+$  también lo es. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

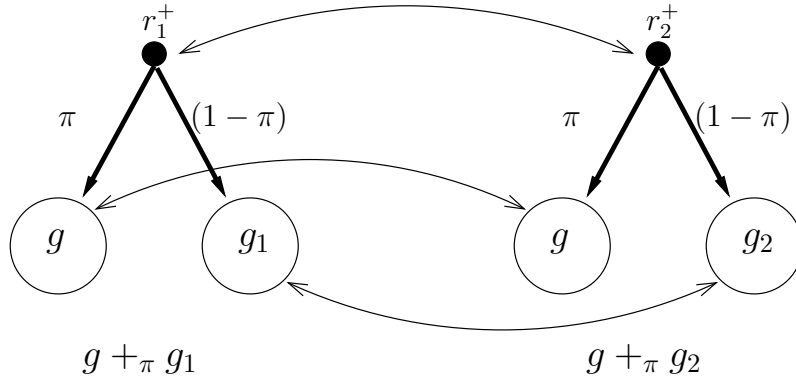


Figura 4.18: Esquema de relación de bisimulación

- $(r_1^+, r_2^+)$
- $(v, v)$  con  $v \in V$
- $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$  tal que  $(v_1, v_2) \in R$

Por la construcción de  $g +_\pi g_i$  dada en la Definición 21 vemos que el segundo caso es verificado por la relación  $Id(V)$ ; el tercer caso es verificado por la relación  $R$ . Entonces sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para  $(r_1^+, r_2^+)$ , es decir, queremos probar que  $\mu_1^+(r_1^+, a, S \cap V_1^+) = \mu_2^+(r_2^+, a, S \cap V_2^+)$ , donde  $S \in (V_1^+ \cup V_2^+)/R^+$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \mu_1^+(r_1^+, a, S \cap V_1^+) = \\
& \{ \text{porque } V_1^+ = V \cup V_1 \cup \{r_1^+\} \} \\
& = \mu_1^+(r_1^+, a, S \cap (V \cup V_1 \cup \{r_1^+\})) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_1^+ \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V \cup V_1 \cup \{r_1^+\})} \mu_1^+(r_1^+, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_1 \cap V = \emptyset \text{ y } r_1^+ \in N - (V_1^+ \cup V_2^+) \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V} \mu_1^+(r_1^+, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_1} \mu_1^+(r_1^+, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_1^+\}} \mu_1^+(r_1^+, a, v') = \\
& \{ \text{por def. de } \mu_1^+ \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V} \pi \mu(r, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_1} (1 - \pi) \mu_1(r_1, a, v') + 0 = \\
& \{ \text{por propiedades de la suma y por definición de } \mu_1 \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V} \pi \mu(r, a, v') + (1 - \pi) \mu_1(r_1, a, S \cap V_1) = \\
& \{ \text{porque } g_1 \sim^{pr} g_2 \text{ y } S \cap (V_1 \cup V_2) \text{ es clase de equivalencia de } R \text{ o } S \cap (V_1 \cup V_2) = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V} \pi \mu(r, a, v') + (1 - \pi) \mu_2(r_2, a, S \cap V_2) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_2 \text{ para conjuntos y propiedades de la sumatoria} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V} \pi \mu(r, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_2} \mu_2^+(r_2^+, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_2^+\}} 0 = \\
& \{ \text{por def. de } \mu_2^+ \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap V} \mu_2^+(r_2^+, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_2} \mu_2^+(r_2^+, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_2^+\}} \mu_2^+(r_2^+, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_2 \cap V = \emptyset \text{ y } r_2^+ \in N - (V_1^+ \cup V_2^+) \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V \cup V_2 \cup \{r_2^+\})} \mu_2^+(r_2^+, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definición de } \mu_2^+ \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_2^+(r_2^+, a, S \cap (V \cup V_2 \cup \{r_2^+\})) = \\
&\quad \{ \text{porque } V_2^+ = V \cup V_2 \cup \{r_2^+\} \} \\
&= \mu_2^+(r_2^+, a, S \cap V_2^+)
\end{aligned}$$

**Subcaso 1.2.**  $(g_1 +_\pi g \sim^{pr} g_2 +_\pi g)$

Sea  $r_i^+$  la raíz y  $\mu_i^+$  la función de distribución de transiciones de  $g_i +_\pi g, i = 1, 2$ . Por la definición 21 los grafos asociados son:

$g_i +_\pi g = \langle V_i^+, r_i^+, \mu_i^+ \rangle, i = 1, 2$  donde  $V_i^+ = V_i \cup V \cup \{r_i^+\}$

La Figura 4.19 nos muestra un esquema de los grafos  $g_1 +_\pi g$  y  $g_2 +_\pi g$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la del medio es la relación de bisimulación  $R$  y la inferior es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$ .

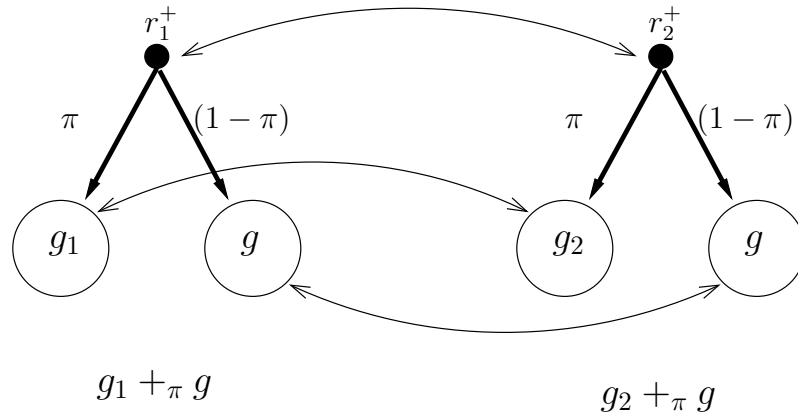


Figura 4.19: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R^+ = \{(r_1^+, r_2^+), (r_2^+, r_1^+)\} \cup R \cup Id(V \cup \{r_1^+, r_2^+\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_1 +_\pi g$  y  $g_2 +_\pi g$ .

La demostración de este caso es similar a la anterior.

**Caso 2.** Para “.” tenemos dos casos:  $g.g_1 \sim^{pr} g.g_2$  y  $g_1.g \sim^{pr} g_2.g$

**Subcaso 2.1.**  $(g.g_1 \sim^{pr} g.g_2)$

Sea  $\mu'_i$  la función de distribución de transiciones de  $g.g_i, i = 1, 2$ . Los grafos asociados son:

$g.g_i = \langle V'_i, r, \mu'_i \rangle, i = 1, 2$  donde  $V'_i = (V \cup V_i) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}$

La Figura 4.20 nos muestra un esquema de los grafos  $g.g_1$  y  $g.g_2$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$  y la inferior es la relación de bisimulación  $R$ .

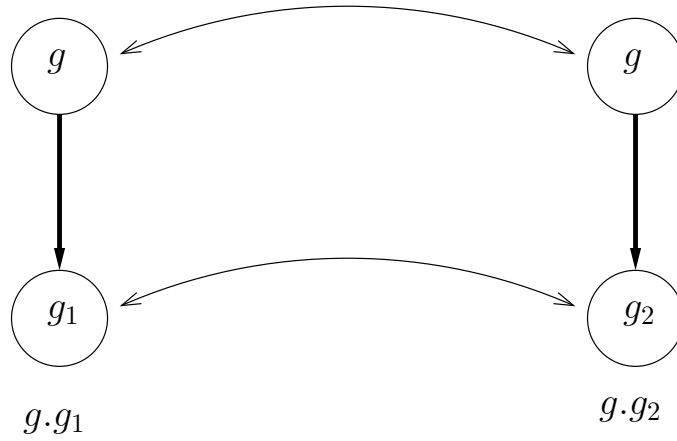


Figura 4.20: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R' = Id(V) \cup R$$

es una bisimulación probabilista entre  $g.g_1$  y  $g.g_2$ . Como antes, vemos que  $R'$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(v, v)$  con  $v \in V$
- $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$  tal que  $(v_1, v_2) \in R$

Por la construcción de  $g.g_i$  dada en la Definición 21 vemos que para el segundo caso se verifica con  $R$ . Entonces nos queda probar que la segunda condición se cumple para el primer caso, es decir, queremos probar que  $\mu'(v, a, S \cap V_1') = \mu'_2(v, a, S \cap V_2')$ , donde  $S \in (V_1' \cup V_2')/R'$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu'(v, a, S \cap V_1') &= \\ \{ \text{porque } V_1' &= (V \cup V_1) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\} \} \\ &= \mu'_1(v, a, S \cap ((V \cup V_1) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) = \\ \{ \text{por definición de } \mu'_1 &\text{ para conjuntos} \} \\ &= \sum_{v' \in (S \cap ((V \cup V_1) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu'_1(v, a, v') = \\ \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_1 \cap V &= \emptyset \} \\ &= \sum_{v' \in (S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu'_1(v, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_1)} \mu'_1(v, a, v') = \\ \text{Aquí podemos separar dos casos: } S \cap V_1 &= \{r_1\} \text{ que } \mu'_1(v, a, v') > 0 \text{ o} \\ S \cap V_1 &= \{v \in V_1 | v \neq r_1\} \text{ que } \mu'_1(v, a, v') = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \{ \text{caso } S \cap V_1 = \{r_1\} \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu(v, a, v') + \mu'_1(v, a, r_1) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_1 \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu(v, a, v') + \sum_{v' \in V \wedge \text{endpoint}(v')} \mu(v, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_2 \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu'_2(v, a, v') + \mu'_2(v, a, r_2) = \\
& \{ \text{como } S \cap V_1 = \{r_1\} \text{ entonces } S \cap V_2 = \{r_2\} \text{ y por definición de } \mu'_2 \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}))} \mu'_2(v, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_2)} \mu'_2(v, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_2 \cap V = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V \cup V_2) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_2(v, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_2 \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu'_2(v, a, S \cap ((V \cup V_2) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) \\
& \{ \text{porque } V'_2 = (V \cup V_2) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu'_2(v, a, S \cap V'_2)
\end{aligned}$$

Podemos ver que el otro caso es mas directo aún.

**Subcaso 2.2.**  $(g_1.g \sim^{pr} g_2.g)$

Sea  $\mu'_i$  la función de distribución de transiciones de  $g_i.g, i = 1, 2$ . Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$$g_i.g = \langle V'_i, r_i, \mu'_i \rangle, \quad i = 1, 2 \text{ donde } V'_i = (V_i \cup V) - \{v \in V_i | \text{endpoint}(v)\}$$

La Figura 4.21 nos muestra un esquema de los grafos  $g.g_1$  y  $g.g_2$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior es la relación de bisimulación  $R$  y la inferior es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$ .

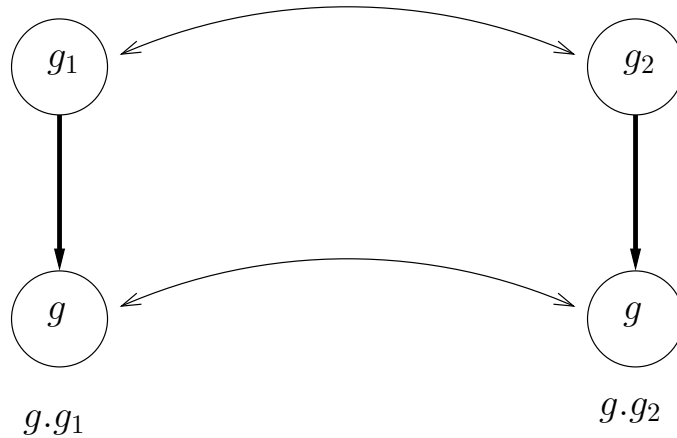


Figura 4.21: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R' = R \cup Id(V)$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_1.g$  y  $g_2.g$ .

Como antes, vemos que  $R'$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$
- $(v, v)$  con  $v \in V$

Por la construcción de  $g_i.g$  dada en la Definición 21 vemos que para el segundo caso se verifica por  $Id(V)$ . Entonces sólo nos queda probar la segunda condición para el primer caso, es decir, queremos demostrar que  $\mu'_1(v_1, a, S \cap V'_1) = \mu'_2(v_2, a, S \cap V'_2)$  donde  $S \in (V'_1 \cup V'_2)/R'$  y  $a \in A$

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \mu'_1(v_1, a, S \cap V'_1) = \\
& \{ \text{por que } V'_1 = (V_1 \cup V) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& \mu'_1(v_1, a, S \cap ((V_1 \cup V) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_1 \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_1 \cup V) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_1(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cap V_1 = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_1(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r\}} \mu'_1(v_1, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap (V - \{r\})} \mu'_1(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_1, \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1(v_1, a, v') + \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } g_1 \sim g_2 \text{ atestado por } R \text{ y por la forma de } R \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_2 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_2(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_2 \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_2(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r\}} \mu'_2(v_2, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap (V - \{r\})} \mu'_2(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cap V_2 = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_2 \cup V) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_2(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu'_2 \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu'_2(v_2, a, S \cap ((V_2 \cup V) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{porque } V'_2 = (V_2 \cup V) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu'_2(v_2, a, V'_2)
\end{aligned}$$

**Caso 3.** Para “ $*\pi$ ” tenemos dos casos:  $g^{*\pi} g_1 \sim^{pr} g^{*\pi} g_2$  y  $g_1^{*\pi} g \sim^{pr} g_2^{*\pi} g$

**Subcaso 3.1.**  $(g^{*\pi}g_1 \sim^{pr} g^{*\pi}g_2)$

Sea  $r_i^*$  la raíz y  $\mu_i^*$  la función de distribución de transiciones de  $g^{*\pi}g_i$ ,  $i = 1, 2$ . Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$$g^{*\pi}g_i = \langle V_i^*, r_i^*, \mu_i^* \rangle, \quad i = 1, 2 \quad \text{donde } V_i^* = (V \cup V_i \cup \{r_i^*\}) - \{v \in V \mid \text{endpoint}(v)\}$$

La Figura 4.22 nos muestra un esquema de los grafos  $g^{*\pi}g_1$  y  $g^{*\pi}g_2$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la del medio es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$  y la inferior es la relación de bisimulación  $R$ .

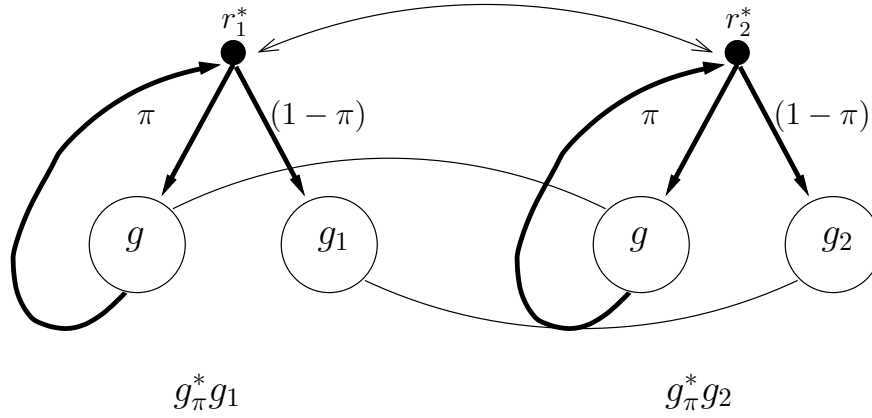


Figura 4.22: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R^* = \{(r_1^*, r_2^*), (r_2^*, r_1^*)\} \cup Id(V \cup \{r_1^*, r_2^*\}) \cup R$$

es una bisimulación probabilista entre  $g^{*\pi}g_1$  y  $g^{*\pi}g_2$ .

Como antes, vemos que  $R^*$  es una relación de equivalencia. Vemos que la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación) se cumple; entonces nos queda probar que se cumple la segunda condición para los casos:

- $(r_1^*, r_2^*)$
- $(v, v)$  con  $v \in V$
- $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$

Por la construcción de  $g^{*\pi}g_i$  dada en la Definición 21 vemos que para el tercer caso se verifica por  $R$ . Entonces nos queda probar la segunda condición para los otros dos casos, es decir, queremos probar que  $\mu_1^*(r_1^*, a, S \cap V_1^*) = \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap V_2^*)$  y  $\mu_1^*(v, a, S \cap V_1^*) = \mu_2^*(v, a, S \cap V_2^*)$  donde  $S \in (V_1^* \cup V_2^*)/R^*$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

**Subcaso 3.1.1.**  $(r_1^*, r_2^*)$

$$\mu_1^*(r_1^*, a, S \cap V_1^*) =$$

{porque  $V_1^* = (V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V \mid \text{endpoint}(v)\}$ }

$$\begin{aligned}
&= \mu_1^*(r_1^*, a, S \cap ((V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_1^* \text{ para conjuntos} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(r_1^*, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cap V_1 = \emptyset \text{ y } r_1^* \notin (V \cup V_1) \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(r_1^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_1} \mu_1^*(r_1^*, a, v') + \\
&\quad \sum_{v' \in S \cap \{r_1^*\}} \mu_1^*(r_1^*, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_1^* \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu(r, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_1} (1 - \pi) \mu_1(r_1, a, v') + \\
&\quad \pi \sum_{v' \in V \wedge \text{endpoint}(v')} \mu(r, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por } g_1 \sim g_2 \text{ atestiguado por } R \text{ y } S \cap (V_1 \cup V_2) \text{ es una clase de equivalencia de } R \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu(r, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_2} (1 - \pi) \mu_2(r_2, a, v') + \\
&\quad \pi \sum_{v' \in V \wedge \text{endpoint}(v')} \mu(r, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_2^* \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(r_2^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_2} \mu_2^*(r_2^*, a, v') + \\
&\quad \sum_{v' \in S \cap \{r_2^*\}} \mu_2^*(r_2^*, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cap V_2 = \emptyset \text{ y } r_2^* \notin (V \cup V_2) \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(r_2^*, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_2^* \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap ((V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) = \\
&\quad \{ \text{porque } V_2^* = (V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap V_2^*)
\end{aligned}$$

**Subcaso 3.1.2.**  $((v, v)$  con  $v \in V$ )

$$\begin{aligned}
&\mu_1^*(v, a, S \cap V_1^*) = \\
&\quad \{ \text{porque } V_1^* = (V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \mu_1^*(v, a, S \cap ((V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_1^* \text{ para conjuntos} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V \cup V_1 \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(v, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cup V_1 = \emptyset \text{ y } r_1^* \notin (V \cup V_1) \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_1} \mu_1^*(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_1^*\}} \mu_1^*(v, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_1^* \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu(v, a, v') + \sum_{v' \in V \wedge \text{endpoint}(v')} \mu(v, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_2^* \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_2} \mu_2^*(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_2^*\}} \mu_2^*(v, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V \cup V_2 = \emptyset \text{ y } r_2^* \notin (V \cup V_2) \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(v, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definici3n de } \mu_2^* \text{ para conjuntos} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_2^*(v, a, S \cap ((V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\})) \\
&\quad \{\text{porque } V_2^* = (V \cup V_2 \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V | \text{endpoint}(v)\}\} \\
&= \mu_2^*(v, a, S \cap V_2^*)
\end{aligned}$$

**Subcaso 3.2.**  $(g_1^{*\pi} g \sim^{pr} g_2^{*\pi} g)$

Sea  $r_i^*$  la raíz y  $\mu_i^*$  la función de distribución de transiciones de  $g_i^{*\pi} g$ ,  $i = 1, 2$ . Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$g_i^{*\pi} g = \langle V_i^*, r_i^*, \mu_i^* \rangle$  para  $i = 1, 2$ , donde  $V_i^* = ((V_i \cup V \cup \{r_i^*\}) - \{v \in V_i | \text{endpoint}(v)\})$

La Figura 4.23 nos muestra un esquema de los grafos  $g_1^{*\pi} g$  y  $g_2^{*\pi} g$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la del medio es la relación de bisimulación  $R$  y la inferior es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g$ .

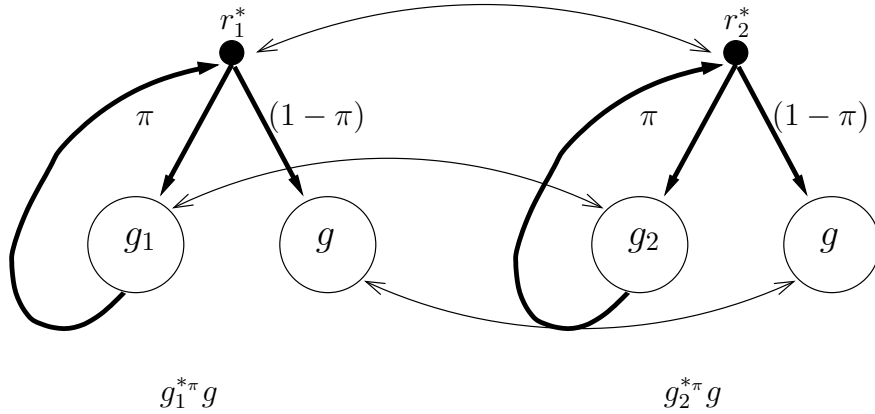


Figura 4.23: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R^* = \{(r_1^*, r_2^*), (r_2^*, r_1^*)\} \cup R \cup Id(V \cup \{r_1^*, r_2^*\})$$

Como antes, vemos que  $R^*$  es una relación de equivalencia. Vemos que la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación) se cumple; entonces nos queda probar que se cumple la segunda condición para los casos:

- $(r_1^*, r_2^*)$
- $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$
- $(v, v)$  con  $v \in V$

Por la construcción de  $g_i^{*\pi} g$  dada en la Definición 21 vemos que para el tercer caso se verifica por  $Id(V)$ . Entonces nos queda probar la segunda condición para los otros dos casos, es decir, queremos probar que  $\mu_1^*(r_1^*, a, S \cap V_1^*) = \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap V_2^*) = \mu_1^*(v_1, a, S \cap V_1^*) = \mu_2^*(v_2, a, S \cap V_2^*) =$  donde  $S \in (V_1 * \cup V_2^*) / R^*$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

**Subcaso 3.2.1.**  $(r_1^*, r_2^*)$

$$\begin{aligned}
& \mu_1^*(r_1^*, a, S \cap V_1^*) = \\
& \{ \text{porque } V_1^* = (V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu_1^*(r_1^*, a, S \cap ((V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_1^* \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(r_1^*, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_1 \cap V = \emptyset \text{ y } r_1^* \notin (V_1 \cup V) \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(r_1^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} \mu_1^*(r_1^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_1^*\}} \mu_1^*(r_1^*, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_1^* \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_1(r_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} (1 - \pi) \mu(r, a, v') + \\
& \pi \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(r_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } g_1 \sim^{pr} g_2 \text{ atestiguado por } R \text{ y por la forma de } R, \text{ vemos que } S \cap ((V_1 \cup V_2) - \{v \in \\
& (V_1 \cup V_2) | \text{endpoint}(v)\}) \text{ es clase de equivalencia de } R \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_2(r_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} (1 - \pi) \mu(r, a, v') + \\
& \pi \sum_{v' \in V_2 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_2(r_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_2^* \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\}))} \mu_2^*(r_2^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} \mu_2^*(r_2^*, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_2^*\}} \mu_2^*(r_2^*, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_2 \cap V = \emptyset \text{ y } r_2^* \notin (V_2 \cup V) \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(r_2^*, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_2^* \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap ((V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{porque } V_2^* = (V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu_2^*(r_2^*, a, S \cap V_2^*)
\end{aligned}$$

**Subcaso 3.2.2.**  $((v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2)$

$$\begin{aligned}
& \mu_1^*(v_1, a, S \cap V_1^*) = \\
& \{ \text{porque } V_1^* = (V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu_1^*(v_1, a, S \cap ((V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_1^* \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_1 \cup V \cup \{r_1^*\}) - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_1 \cap V = \emptyset \text{ y } r_1^* \notin (V_1 \cup V) \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1^*(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} \mu_1^*(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_1^*\}} \mu_1^*(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_1^* \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_1(v_1, a, v') + \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } g_1 \sim^{pr} g_2 \text{ atestiguado por } R \text{ y por la forma de } R, \text{ vemos que } S \cap ((V_1 \cup V_2) - \{v \in \\
& (V_1 \cup V_2) | \text{endpoint}(v)\}) \text{ es clase de equivalencia de } R \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_2 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_2(v_2, a, v') =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \text{por definici3n de } \mu_2^* \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_2 - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V} \mu_2^*(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_2^*\}} \mu_2^*(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por propiedades de la sumatoria y dado que } V_2 \cap V = \emptyset \text{ y } r_2^* \notin (V_2 \cup V) \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})} \mu_2^*(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definici3n de } \mu_1^* \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu_2^*(v_2, a, S \cap ((V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{porque } V_2^* = (V_2 \cup V \cup \{r_2^*\}) - \{v \in V_2 | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu_2^*(v_2, a, S \cap V_2^*)
\end{aligned}$$

□

## Capítulo 5

# Teoría ecuacional para $pr\mathcal{BPA}^*$

Hemos señalado como objetivo del trabajo el de construir el *Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración* ( $pr\mathcal{BPA}^*$ ) con una axiomatización consistente. Para este objetivo, a lo largo del trabajo hasta aquí realizado, hemos presentado la signatura del álgebra; luego propusimos un modelo para ella basado en equivalencia de bisimulación y probamos que la bisimulación es una congruencia para los operadores de  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Esto nos lleva entonces a que la prueba de consistencia se trate de verificar la propiedad sólo para los axiomas. Por ello dejamos para este capítulo la presentación del sistema de axiomas y la prueba de consistencia.

### 5.1. Sistema de Axiomas

El Cuadro 5.1 contiene un sistema de axiomas para  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Este sistema está compuesto por los axiomas  $prA1-5$  para  $pr\mathcal{BPA}$  de Baeten, Bergstra y Smolka [BBS95] y los axiomas  $prBKS1-3$  para el operador de iteración probabilista, que obtuvimos al trabajar sobre los axiomas  $BKS1-3$  para  $\mathcal{BPA}^*$  de Bergstra, Fokkink y Ponse [BFP]. Las variables  $x, y$  y  $z$  en los axiomas toman valores de la colección de términos de procesos.

$pr\mathcal{BPA}^*$		
$x, y, z;$		
$x +_{\pi} y$	$=$	$y +_{(1-\pi)} x$ <span style="float: right;"><math>prA1</math></span>
$x +_{\pi} (y +_{\rho} z)$	$=$	$(x +_{\frac{\pi}{(\pi+\rho-\pi\rho)}} y) +_{\pi+\rho-\pi\rho} z$ <span style="float: right;"><math>prA2</math></span>
$x +_{\pi} x$	$=$	$x$ <span style="float: right;"><math>prA3</math></span>
$(x +_{\pi} y).z$	$=$	$x.z +_{\pi} y.z$ <span style="float: right;"><math>prA4</math></span>
$(x.y).z$	$=$	$x.(y.z)$ <span style="float: right;"><math>prA5</math></span>
$x.(x^{*\pi}y) +_{\pi} y$	$=$	$x^{*\pi}y$ <span style="float: right;"><math>prBKS1</math></span>
$x^{*\pi}(y.z)$	$=$	$(x^{*\pi}y).z$ <span style="float: right;"><math>prBKS2</math></span>
$x^{*\pi\rho}(y.((x +_{\rho} y)^{*\pi}z) +_{\frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho}} z)$	$=$	$(x +_{\rho} y)^{*\pi}z$ <span style="float: right;"><math>prBKS3</math></span>

Cuadro 5.1: Teoría ecuacional para  $pr\mathcal{BPA}^*$

El axioma  $prA1$  expresa la conmutatividad de la composición alternativa probabilista. Establece que la elección entre  $x$  e  $y$  con probabilidad  $\pi$  es lo mismo que la elección entre  $y$  y  $x$  con probabilidad  $1 - \pi$ . El axioma  $prA2$  expresa la asociatividad de la composición



alternativa probabilista: nos dice que elegir primero entre  $x$  e  $(y + z)$  con probabilidad  $\pi$  y luego entre  $y$  y  $z$  con probabilidad  $\rho$  es lo mismo que elegir primero entre  $(x + y)$  y  $z$  con probabilidad  $\pi + \rho - \pi\rho$  y posteriormente entre  $x$  e  $y$  con probabilidad  $\pi/(\pi + \rho - \pi\rho)$ . El axioma *prA3* expresa la idempotencia de la composición alternativa: la elección con probabilidad  $\pi$  entre dos instancias de un mismo proceso para su ejecución es lo mismo que su ejecución con probabilidad 1 (sin la posibilidad de elegir). El axioma *prA4* expresa la distributividad a derecha de la composición secuencial sobre la composición alternativa: una elección con probabilidad  $\pi$  entre  $x$  e  $y$  seguido por  $z$  es lo mismo que una elección con probabilidad  $\pi$  entre  $x$  seguido por  $z$  e  $y$  seguido por  $z$ . El axioma *prA5* expresa la asociatividad de la composición secuencial: nos dice que  $(x.y)$  seguido por  $z$  es lo mismo que ejecutar primero  $x$  seguido de  $(y.z)$ . El axioma *prBKS1* es la ecuación de definición del operador de iteración probabilista. Este axioma, al igual que en la versión no probabilista, introduce un desplegado (unfoldig) en la operación de iteración, indicando como se comportan las probabilidades. El axioma *prBKS2* expresa que es lo mismo la composición secuencial del proceso que itera  $x$  con probabilidad  $\pi$  seguido de  $y$  con el proceso  $z$ , que la iteración de  $x$  con probabilidad  $\pi$  seguido de la composición secuencial de  $y$  con  $x$ . El axioma *prBKS3* expresa que el proceso  $(x^{*\pi}y).z$  es lo mismo que iterar  $x$  con probabilidad  $\pi\rho$  seguido de la elección con probabilidad  $\pi(1 - \rho)/(1 - \pi\rho)$  entre ejecutar la composición secuencial de  $y$  con el proceso mencionado o ejecutar  $z$ .

Una observación interesante sobre esta teoría es que mientras que en álgebra  $\mathcal{BPA}^*$  se cumple la igualdad  $x^*(x^*y) = x^*y$ , probada en la Proposición 2, en álgebra *prBPA*<sup>\*</sup> no podemos decir lo mismo, es decir que no existen  $\pi, \rho$  ni  $\alpha$  tales que la ecuación:

$$x^{*\pi}(x^{*\rho}y) = x^{*\alpha}y$$

pueda ser derivada en la teoría. Tomemos al proceso  $x$  como la acción atómica  $a$  y al proceso  $y$  como la acción atómica  $b$  y veamos en la Figura 5.1 sus respectivos grafos. Podemos verificar que ellos no son bisimilares, entonces, dado que nuestra teoría es consistente (ver sección siguiente) podemos confirmar que si los grafos de dos términos de proceso no son bisimilares entonces no es derivable la igualdad entre ellos en la teoría ecuacional.

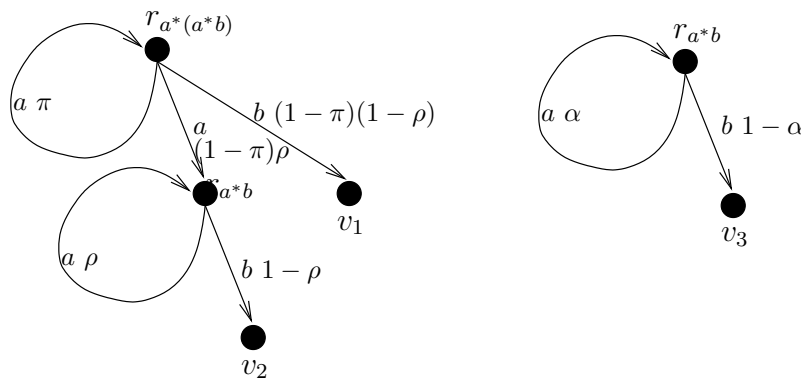


Figura 5.1: Grafos de los procesos  $x^{*\pi}(x^{*\rho}y)$  y  $x^{*\alpha}y$

## 5.2. Consistencia

La axiomatización presentada en la sección anterior para  $pr\mathcal{BPA}^*$  es consistente respecto de la equivalencia de bisimulación, es decir que si dos términos son iguales en la teoría entonces también lo son en el modelo propuesto. Verificamos esto con la prueba de la siguiente proposición:

**Proposición 4.** (*Consistencia*) Una teoría ecuacional  $T = (\Sigma, E)$  es consistente con un modelo  $\mathbb{A}$  bajo alguna interpretación  $\iota$ , si para todo término  $s$  y  $t$  generado en  $\Sigma$  (quizá con variables libres) se cumple que,

$$T \vdash s = t \text{ implica que } \mathbb{A}, \iota \models s = t.$$

Prueba: Dado que hemos probado que la relación de bisimulación probabilista es una congruencia para los operadores del álgebra, bastará con hacer la demostración de consistencia sólo para los axiomas de la teoría.

Denotaremos con  $g_t$  al grafo asociado al término  $t$ , y daremos en cada caso la descripción de los grafos asociados a los términos de los axiomas.

**Caso 1.**  $prA1: x +_{\pi} y = y +_{(1-\pi)} x$

Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$$g_{x+y} = \langle V_{x+y}, r_{x+y}, \mu_{x+y} \rangle \text{ con } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \text{ y}$$

$$g_{y+x} = \langle V_{y+x}, r_{y+x}, \mu_{y+x} \rangle \text{ con } V_{y+x} = V_y \cup V_x \cup \{r_{y+x}\}$$

La Figura 5.2 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x+y}$  y  $g_{y+x}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$  y la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$ .

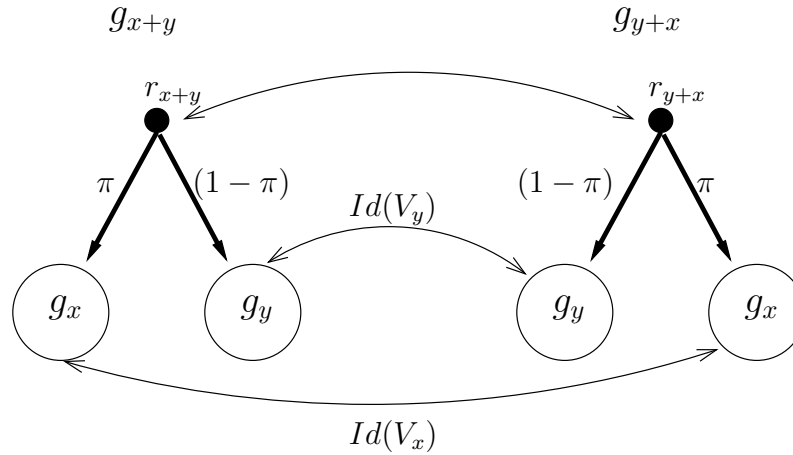


Figura 5.2: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R = \{(r_{x+y}, r_{y+x}), (r_{y+x}, r_{x+y})\} \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup Id(\{r_{x+y}, r_{y+x}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x+y}$  y  $g_{y+x}$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x+y}, r_{y+x})$
- $(v, v) \in Id(V_x)$
- $(v, v) \in Id(V_y)$

Por la construcción de  $g_{x+y}$  y de  $g_{y+x}$  dada en la Definición 21 vemos que el segundo caso es verificado por la relación  $Id(V_x)$ ; el tercer caso es verificado por la relación  $Id(V_y)$ . Entonces sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para  $(r_{x+y}, r_{y+x})$ , es decir, queremos probar que:

$$\mu_{x+y}(r_{x+y}, a, S \cap V_{x+y}) = \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, S \cap V_{y+x}), \text{ donde } S \in (V_{x+y} \cup V_{y+x})/R \text{ y } a \in A.$$

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, S \cap V_{x+y}) = \\ & \{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\ & = \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, S \cap (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\})) = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \text{ para conjuntos} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\})} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de } a \text{ pares} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap V_x} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap V_x} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') = \\ & \{ \text{por } \pi = 1 - (1 - \pi) \text{ y conmutatividad de la suma} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap V_y} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_x} 1 - (1 - \pi) \mu_x(r_x, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{y+x} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap V_x} \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in S \cap \{r_{y+x}\}} \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{y+x}\} \text{ son disjuntos de } a \text{ pares} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap (V_y \cup V_x \cup \{r_{y+x}\})} \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{y+x} \text{ para conjuntos} \} \\ & = \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, S \cap (V_y \cup V_x \cup \{r_{y+x}\})) = \\ & \{ \text{porque } V_{y+x} = V_y \cup V_x \cup \{r_{y+x}\} \} \\ & = \mu_{y+x}(r_{y+x}, a, S \cap V_{y+x}) \end{aligned}$$

**Caso 2.** *prA2:*  $x + \pi (y + \rho z) = (x + \frac{\pi}{(\pi + \rho - \pi\rho)} y) + \pi + \rho - \pi\rho z$

Por la Definición 21 los grafos asociados son::

$$g_{x+(y+z)} = \langle V_{x+(y+z)}, r_{x+(y+z)}, \mu_{x+(y+z)} \rangle y$$

$$g_{(x+y)+z} = \langle V_{(x+y)+z}, r_{(x+y)+z}, \mu_{(x+y)+z} \rangle \text{ donde}$$

$$V_{x+(y+z)} = V_x \cup V_{y+z} \cup \{r_{x+(y+z)}\},$$

$$V_{y+z} = V_y \cup V_z \cup \{r_{y+z}\},$$

$$V_{(x+y)+z} = V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)+z}\} \text{ y}$$

$$V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}$$

La Figura 5.3 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x+(y+z)}$  y  $g_{(x+y)+z}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de identidad en los nodos de  $g_x$ , la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de identidad en los nodos de  $g_y$  y la etiquetada con  $Id(V_z)$  es la relación de identidad en los nodos de  $g_z$ .

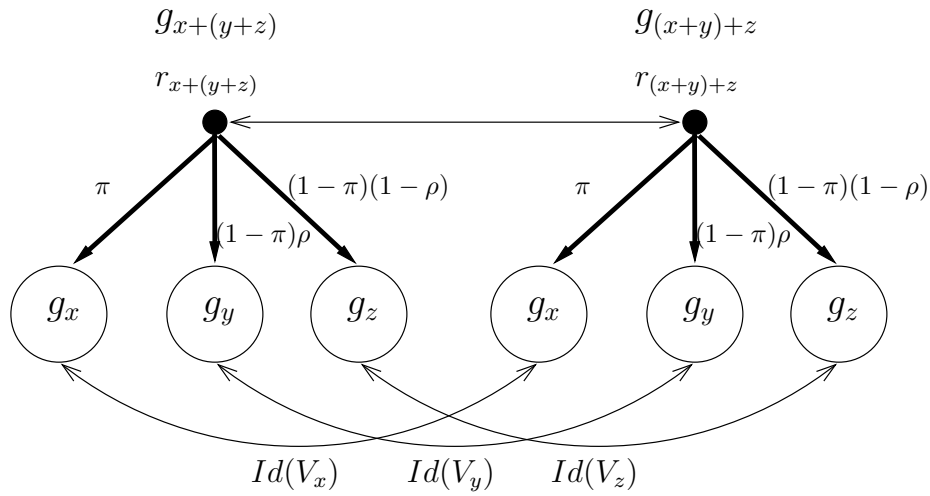


Figura 5.3: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R = \{(r_{x+(y+z)}, r_{(x+y)+z}), (r_{(x+y)+z}, r_{x+(y+z)})\} \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup Id(V_z) \cup Id(\{r_{x+(y+z)}, r_{(x+y)+z}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x+(y+z)}$  y  $g_{(x+y)+z}$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x+(y+z)}, r_{(x+y)+z})$
- $(v, v) \in Id(V_x)$
- $(v, v) \in Id(V_y)$
- $(v, v) \in Id(V_z)$

Por la construcción de  $g_{x+(y+z)}$  y de  $g_{(x+y)+z}$  dada en la Definición 21 podemos observar que el segundo, tercer y cuarto caso son verificados por las relaciones  $Id(V_x)$ ,  $Id(V_y)$  e  $Id(V_z)$  respectivamente. Por lo que sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para el primer caso. Es decir, queremos probar que

$$\mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, S \cap V_{x+(y+z)}) = \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, S \cap V_{(x+y)+z})$$

donde  $S \in (V_{x+(y+z)} \cup V_{(x+y)+z})/R$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, S \cap V_{x+(y+z)}) = \\ & \{ \text{porque } V_{x+(y+z)} = V_x \cup V_{y+z} \cup \{r_{x+(y+z)}\} \} \\ & = \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, S \cap (V_x \cup V_{y+z} \cup \{r_{x+(y+z)}\})) = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+(y+z)} \text{ para conjuntos} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap (V_x \cup V_{y+z} \cup \{r_{x+(y+z)}\})} \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_x, V_{y+z} \text{ y } \{r_{x+(y+z)}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_{y+z})} \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap \{r_{x+(y+z)}\})} \mu_{x+(y+z)}(r_{x+(y+z)}, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+(y+z)} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_{y+z})} (1 - \pi) \mu_{y+z}(r_{y+z}, a, v') + 0 = \\ & \{ \text{porque } V_{y+z} = V_y \cup V_z \cup \{r_{y+z}\} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap V_x} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y \cup V_z \cup \{r_{y+z}\})} (1 - \pi) \mu_{y+z}(r_{y+z}, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_y, V_z \text{ y } \{r_{y+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_y)} (1 - \pi) \mu_{y+z}(r_{y+z}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - \pi) \mu_{y+z}(r_{y+z}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap \{r_{y+z}\})} (1 - \pi) \mu_{y+z}(r_{y+z}, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{y+z} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_y)} ((1 - \pi) \rho) \mu_y(r_y, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - \pi) (1 - \rho) \mu_z(r_z, a, v') + 0 = \\ & \{ \text{porque } \pi = (\pi + \rho - \pi \rho) \left( \frac{\pi}{(\pi + \rho - \pi \rho)} \right), (1 - \pi) \rho = (\pi + \rho - \pi \rho) \left( 1 - \left( \frac{\pi}{(\pi + \rho - \pi \rho)} \right) \right) \text{ y} \\ & (1 - \pi) (1 - \rho) = 1 - (\pi + \rho - \pi \rho) \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} (\pi + \rho - \pi \rho) \left( \frac{\pi}{(\pi + \rho - \pi \rho)} \right) \mu_x(r_x, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap V_y)} (\pi + \rho - \pi \rho) \left( 1 - \left( \frac{\pi}{(\pi + \rho - \pi \rho)} \right) \right) \mu_y(r_y, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - (\pi + \rho - \pi \rho)) \mu_z(r_z, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} (\pi + \rho - \pi \rho) \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_y)} (\pi + \rho - \pi \rho) \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap \{r_{x+y}\})} (\pi + \rho - \pi \rho) \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - (\pi + \rho - \pi \rho)) \mu_z(r_z, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\ & = \sum_{v' \in S \cap (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\})} (\pi + \rho - \pi \rho) \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - (\pi + \rho - \pi \rho)) \mu_z(r_z, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_{x+y})} (\pi + \rho - \pi \rho) \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_z)} (1 - (\pi + \rho - \pi \rho)) \mu_z(r_z, a, v') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)+z} \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap V_{x+y})} \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_z)} \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in (S \cap \{r_{(x+y)+z}\})} \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x+y}, V_z \text{ y } \{r_{(x+y)+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)+z}\})} \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{(x+y)+z} = V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)+z}\} \} \\
& = \sum_{v' \in (S \cap V_{(x+y)+z})} \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)+z} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu_{(x+y)+z}(r_{(x+y)+z}, a, S \cap V_{(x+y)+z})
\end{aligned}$$

**Caso 3.** *prA3:*  $x +_\pi x = x$

Sea  $g_{x+x} = g_x^l + g_x^r$  donde  $g_x^l$ ,  $g_x^r$  y  $g_x$  son grafos representativos del proceso  $x$  y sus descripciones son las siguientes:

$$g_x^l = \langle V_x^l, r_x^l, \mu_x^l \rangle$$

$$g_x^r = \langle V_x^r, r_x^r, \mu_x^r \rangle$$

$g_x = \langle V_x, r_x, \mu_x \rangle$  con  $V_x^l, V_x^r$  y  $V_x$  disjuntos de a pares.

Por la Definición 21  $g_{x+x}$  tiene la forma:

$$g_{x+x} = \langle V_{x+x}, r_{x+x}, \mu_{x+x} \rangle \text{ con } V_{x+x} = V_x^l \cup V_x^r \cup \{r_{x+x}\}$$

La Figura 5.4 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x+x}$  y  $g_x$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $R_1$  es la relación de bisimulación entre  $g_x^l$  y  $g_x$ , la etiquetada con  $R_2$  es la relación de bisimulación entre  $g_x^r$  y  $g_x$ .

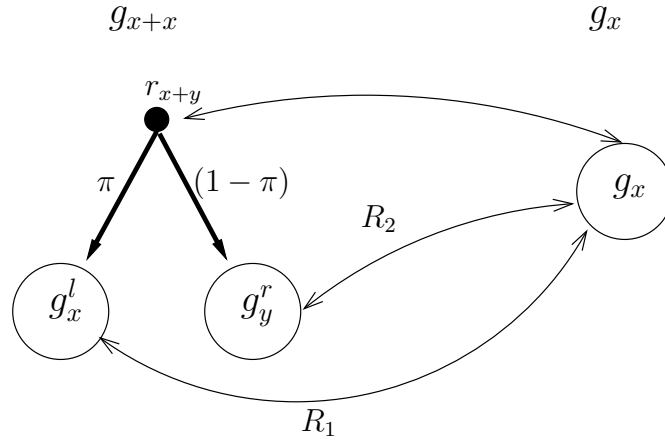


Figura 5.4: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R = (\{(r_{x+x}, r_x), (r_x, r_{x+x})\} \cup (R_1 \cup R_2)^{CL} \cup Id(\{r_{x+x}, r_x\}))$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x+x}$  y  $g_x$ , donde  $(\_)^{CL}$  es la clausura reflexiva y transitiva de un conjunto. Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x+x}, r_x)$
- $(v_1, v_2) \in R_1$
- $(v_1, v_2) \in R_2$

Por la construcción de  $g_{x+x}$  y de  $g_x$  dada en la Definición 21 podemos observar que el segundo y tercer caso son verificados por las relaciones  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Por lo que sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para el primer caso. Es decir, queremos ver que:

$$\mu_{x+x}(r_{x+x}, a, S \cap V_{x+x}) = \mu_x(r_x, a, S \cap V_x) \text{ donde } S \in (V_{x+x} \cup V_x)/R \text{ y } a \in A.$$

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, S \cap V_{x+x}) = \\ & \{ \text{porque } V_{x+x} = V_x^l \cup V_x^r \cup \{r_{x+x}\} \} \\ & = \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, S \cap (V_x^l \cup V_x^r \cup \{r_{x+x}\})) = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+x} \text{ para conjuntos} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap (V_x^l \cup V_x^r \cup \{r_{x+x}\}))} \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, v') = \\ & \{ \text{porque } V_x^l, V_x^r \text{ y } \{r_{x+x}\} \text{ son disjuntos de } a \text{ pares} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x^l)} \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_x^r)} \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, v') + \\ & \sum_{v' \in (S \cap \{r_{x+x}\})} \mu_{x+x}(r_{x+x}, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_{x+x} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x^l)} \pi \mu_x^l(r_x^l, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_x^r)} (1 - \pi) \mu_x^r(r_x^r, a, v') + 0 = \\ & \{ \text{por } g_x^l \sim g_x \text{ atestado por } R_1 \text{ y } g_x^r \sim g_x \text{ atestado por } R_2 \text{ y porque } S \cap (V_x^l \cup V_x) \\ & \text{es clase de equivalencia de } R_1 \text{ y } S \cap (V_x^r \cup V_x) \text{ es clase de equivalencia de } R_2 \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap V_x)} (1 - \pi) \mu_x(r_x, a, v') = \\ & \{ \text{por aplicación de operaciones matemáticas} \} \\ & = \sum_{v' \in (S \cap V_x)} \mu_x(r_x, a, v') = \\ & \{ \text{por definición de } \mu_x \text{ para conjuntos} \} \\ & = \mu_x(r_x, a, (S \cap V_x)) \end{aligned}$$

**Caso 4.** *prA4*:  $(x +_\pi y).z = x.z +_\pi y.z$

Sea  $g_{(x+y)z} = g_{x+y}.g_z$  y  $g_{xz+yz} = g_{xz} + g_{yz}$  con  $g_{xz} = g_x.g_z^l$  y  $g_{yz} = g_y.g_z^r$  donde  $g_z, g_z^l$  y  $g_z^r$  grafos representativos del proceso  $z$ .

Por la Definición 21 los grafos mencionados tienen la forma:

$$\begin{aligned}
g_{(x+y)z} &= \langle V_{(x+y)z}, r_{x+y}, \mu_{(x+y)z} \rangle \\
g_{xz+yz} &= \langle V_{xz+yz}, r_{xz+yz}, \mu_{xz+yz} \rangle \\
g_{xz} &= \langle V_{xz}, r_x, \mu_{xz} \rangle \\
g_{yz} &= \langle V_{yz}, r_y, \mu_{yz} \rangle \\
g_z &= \langle V_z, r_z, \mu_z \rangle \\
g_z^l &= \langle V_z^l, r_z^l, \mu_z^l \rangle \\
g_z^r &= \langle V_z^r, r_z^r, \mu_z^r \rangle
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{(x+y)z} &= (V_{x+y} \cup V_z) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\} \\
V_{x+y} &= V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \\
V_{xz+yz} &= V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\} \\
V_{xz} &= (V_x \cup V_z^l) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\} \\
V_{yz} &= (V_y \cup V_z^r) - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\}
\end{aligned}$$

La Figura 5.5 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{(x+y)z}$  y  $g_{xz+yz}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$ , la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$ , la etiquetada con  $R_1$  es la relación de bisimulación entre  $g_z$  y  $g_z^l$  y la etiquetada con  $R_2$  es la relación de bisimulación entre  $g_z$  y  $g_z^r$ .

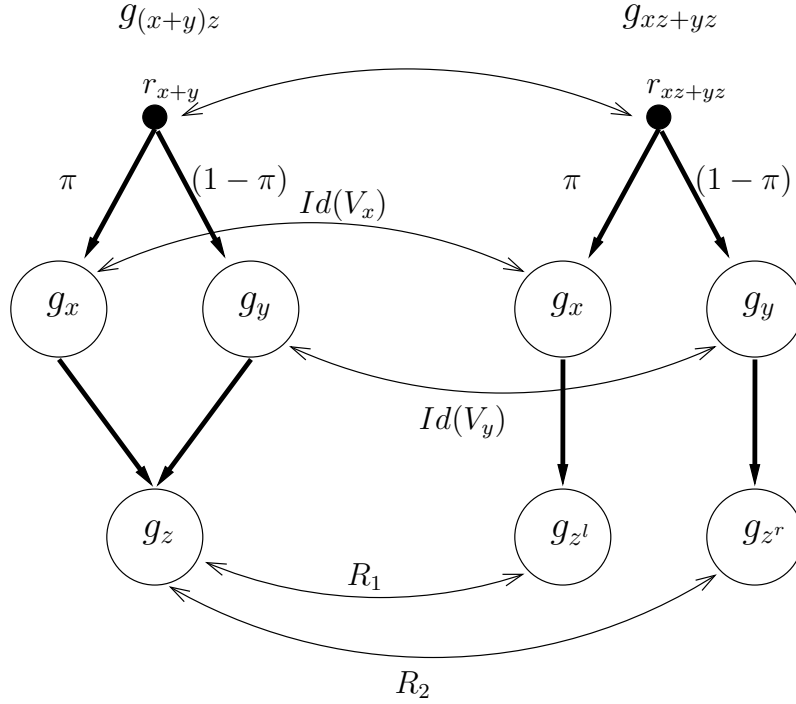


Figura 5.5: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$R = \{(r_{x+y}, r_{xz+yz}), (r_{xz+yz}, r_{x+y})\} \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup (R_1 \cup R_2)^{CL} \cup Id(\{r_{x+y}, r_{xz+yz}\})$  es una bisimulación probabilista entre  $g_{(x+y)z}$  y  $g_{xz+yz}$ , donde  $(\_)^{CL}$  es la clausura



reflexiva y transitiva de un conjunto. Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x+y}, r_{xz+yz})$
- $(v, v) \in Id(V_x)$
- $(v, v) \in Id(V_y)$
- $(v_1, v_2) \in R_1$
- $(v_1, v_2) \in R_2$

Por la construcción de  $g_{(x+y)z}$  y de  $g_{xz+yz}$  dada en la Definición 21 podemos observar que el cuarto y quinto caso son verificados por las relaciones  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Por lo que sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para los tres primeros casos. Es decir, queremos ver que:

$$\begin{aligned} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, S \cap V_{(x+y)z}) &= \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, S \cap V_{xz+yz}), \\ \mu_{(x+y)z}(v, a, S \cap V_{(x+y)z}) &= \mu_{xz+yz}(v, a, S \cap V_{xz+yz}) \text{ con } (v, v) \in Id(V_x) \\ \mu_{(x+y)z}(v, a, S \cap V_{(x+y)z}) &= \mu_{xz+yz}(v, a, S \cap V_{xz+yz}) \text{ con } (v, v) \in Id(V_y) \text{ y} \\ &\text{donde } S \in (V_{(x+y)z} \cup V_{xz+yz})/R \text{ y } a \in A. \end{aligned}$$

Para ello procedemos de la siguiente forma:

**Subcaso 4.1.**  $(r_{x+y}, r_{xz+yz})$

$$\begin{aligned} &\mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, S \cap V_{(x+y)z}) = \\ &\{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)z} \text{ para conjuntos} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap V_{(x+y)z}} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{porque } V_{(x+y)z} = (V_{x+y} \cup V_z) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap ((V_{x+y} \cup V_z) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{porque } V_{x+y} \text{ y } V_z \text{ son disjuntos} \} \\ &= \sum_{v' \in (S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\}))} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{porque si } S \cap V_z \neq \emptyset \text{ entonces por definición de } \mu_{(x+y)z} \text{ sólo } \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, r_z) > 0 \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, v') + \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, r_z) = \\ &\{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)z} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in V_{x+y} \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) - \{v \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\ &\sum_{v' \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap V_x} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\ &\{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap V_x} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') + 0 = \\ &\{ \text{separando la sumatoria en subconjuntos disjuntos} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y \wedge \text{endpoint}(v')} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{xz} \text{ y } \mu_{yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{xz}(r_x, a, v') + \pi \mu_x(r_x, a, r_z^l) + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, r_z^r) = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{xz} \text{ y } \mu_{yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{xz}(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z^l} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z^r} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_x \cap V_z^l = \emptyset \text{ y } V_y \cap V_z^r = \emptyset \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_z^l) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{xz}(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap ((V_y \cup V_z^r) - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{xz} = (V_x \cup V_z^l) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\} \text{ y } V_{yz} = (V_y \cup V_z^r) - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&\} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{xz}} \pi \mu_{xz}(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{xz+yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{xz}} \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{xz+yz}\}} \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{xz}, V_{yz} \text{ y } \{r_{xz+yz}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\})} \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{xz+yz} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, S \cap (V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\})) = \\
&\{ \text{porque } V_{xz+yz} = V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\} \} \\
&= \mu_{xz+yz}(r_{xz+yz}, a, V_{xz+yz})
\end{aligned}$$

**Subcaso 4.2.**  $(v, v) \in Id(V_x)$

$$\begin{aligned}
&\mu_{(x+y)z}(v, a, S \cap V_{(x+y)z}) = \\
&\{ \text{porque } V_{(x+y)z} = V_{x+y} \cup V_z - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&\mu_{(x+y)z}(v, a, S \cap (V_{x+y} \cup V_z - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})) = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)z} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_{x+y} \cup V_z) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)z}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{x+y} \cap V_z = \emptyset \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)z}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)z}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque si } S \cap V_z \neq \emptyset \text{ entonces por definición de } \mu_{(x+y)z} \text{ sólo } \mu_{(x+y)z}(r_{x+y}, a, r_z) > 0 \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)z}(v, a, v') + \mu_{(x+y)z}(v, a, r_z) = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)z} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v, a, v') + \sum_{v' \in V_{x+y} \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) - \{v \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \mu_{x+y}(v, a, v') + \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{x+y} \} \\
&= \sum_{v' \in (S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}))} \mu_x(v, a, v') + \sum_{v' \in (S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\}))} \mu_y(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(v, a, v') + \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(v, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{xz} \text{ y de } \mu_{yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{xz}(v, a, v') + \\
&\mu_{xz}(v, a, r_z^l) + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{yz}(v, a, v') + \mu_{yz}(v, a, r_z^r) = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{xz} \text{ y de } \mu_{yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{xz}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z^l} \mu_{xz}(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{yz}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z^r} \mu_{yz}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_x \cap V_z^l = \emptyset \text{ y } V_y \cap V_z^r = \emptyset \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_z^l) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{xz}(v, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap ((V_y \cup V_z^r) - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{yz}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{xz} = (V_x \cup V_z^l) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\} \text{ y } V_{yz} = (V_y \cup V_z^r) - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{xz}} \mu_{xz}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} \mu_{yz}(v, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{xz+yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{xz}} \mu_{xz+yz}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} \mu_{xz+yz}(v, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{xz+yz}\}} \mu_{xz+yz}(v, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{xz}, V_{yz} \text{ y } \{r_{xz+yz}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\})} \mu_{xz+yz}(v, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{xz+yz} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_{xz+yz}(v, a, S \cap (V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\})) = \\
&\{ \text{porque } V_{xz+yz} = V_{xz} \cup V_{yz} \cup \{r_{xz+yz}\} \} \\
&= \mu_{xz+yz}(v, a, S \cap V_{xz+yz})
\end{aligned}$$

**Subcaso 4.3.**  $(v, v) \in Id(V_y)$

La demostraci3n de este caso es similar a la anterior.

**Caso 5.**  $prA5: (x.y).z = x.(y.z)$

Los grafos representativos son:

$$g_{(xy)z} = \langle V_{(xy)z}, r_x, \mu_{(xy)z} \rangle y$$

$$g_{x(yz)} = \langle V_{x(yz)}, r_x, \mu_{x(yz)} \rangle$$

La Figura 5.6 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{(xy)z}$  y  $g_{x(yz)}$ ; y nos permite ver una posible relaci3n de bisimulaci3n. Las flechas horizontales indican las relaciones: la

superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$ , la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$  y la etiquetada con  $Id(V_z)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_z$ .

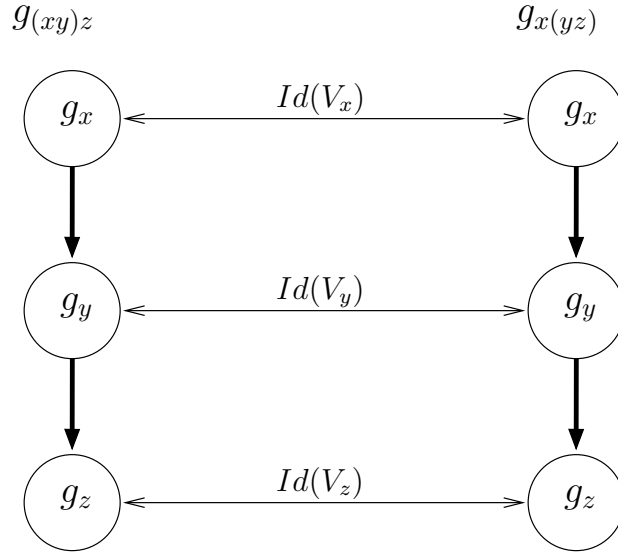


Figura 5.6: Esquema de relación de bisimulación

Por la construcción de  $g_{(xy)z}$  y de  $g_{x(yz)}$  dada en la Definición 21 podemos observar que ambos grafos son isomorfos y como consecuencia bisimilares.

**Caso 6.** *prBKS1*:  $x.(x^{*\pi}y) +_{\pi} y = x^{*\pi}y$

Sea  $g_{x(x^*y)+y} = g_{x(x^*y)} +_{\pi} g'_y$ ,  $g_{x(x^*y)} = g'_x \cdot g_{x^*y}$  y  $g_{x^*y} = g_x^{*\pi} g_y$  donde  $g'_x, g_x$  son grafos representativos del proceso  $x$  y  $g'_y, g_y$  son grafos representativos del proceso  $y$ .

Por la Definición 21 los grafos mencionados tienen la forma:

$$\begin{aligned}
g_{x(x^*y)+y} &= \langle V_{x(x^*y)+y}, r_{x(x^*y)+y}, \mu_{x(x^*y)+y} \rangle \\
g_{x(x^*y)} &= \langle V_{x(x^*y)}, r'_x, \mu_{x(x^*y)} \rangle \\
g_{x^*y} &= \langle V_{x^*y}, r_{x^*y}, \mu_{x^*y} \rangle \\
g'_x &= \langle V'_x, r'_x, \mu'_x \rangle \\
g'_y &= \langle V'_y, r'_y, \mu'_y \rangle \\
g_x &= \langle V_x, r_x, \mu_x \rangle \\
g_y &= \langle V_y, r_y, \mu_y \rangle
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{x(x^*y)+y} &= V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\} \\
V_{x(x^*y)} &= (V'_x \cup V_{x^*y}) - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\} \\
V_{x^*y} &= (V_x \cup V_y) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}
\end{aligned}$$

La Figura 5.7 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x(x^*y)+y}$  y  $g_{x^*y}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $R_1$  es la relación de bisimulación entre  $g'_x$  y  $g_x$ , la etiquetada con  $R_2$  es la relación de bisimulación entre

$g'_y$  y  $g_y$ , la siguiente relaciona la raíz del subgrafo  $g_{x^*y}$  indicado por la línea de puntos con la raíz del segundo grafo, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$  y la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$ .

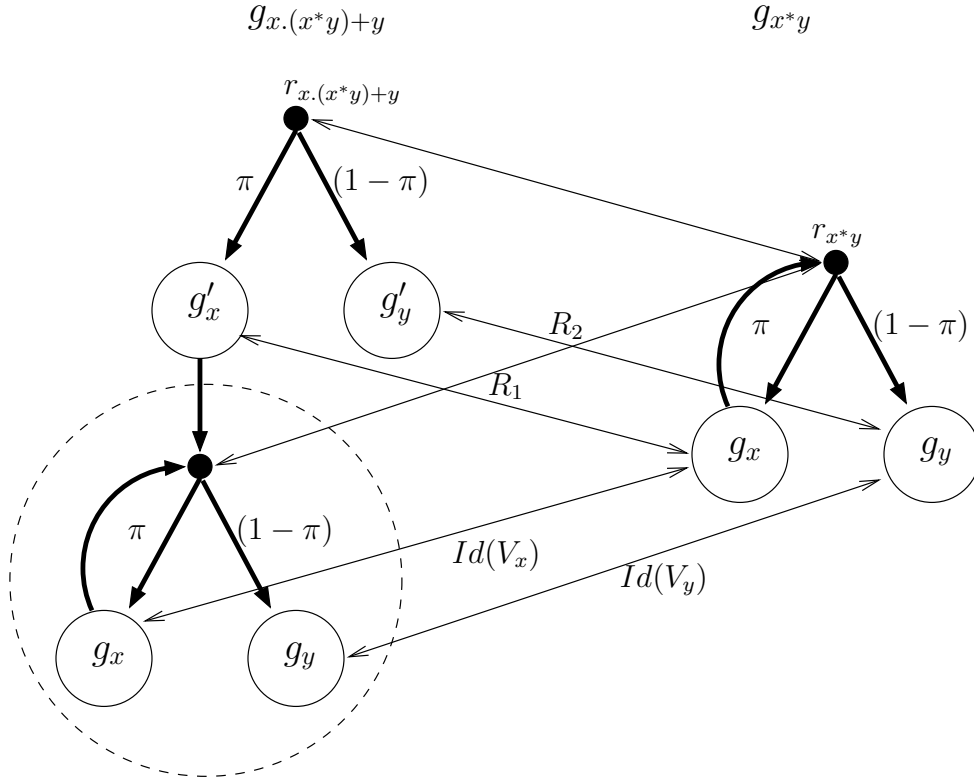


Figura 5.7: Esquema de relación de bisimulación

Mostramos que

$$R = \{(r_{x(x^*y)+y}, r_{x^*y}), (r_{x^*y}, r_{x(x^*y)+y}), (r_{x^*y}, r_{x^*y})\} \cup R_1 \cup R_2 \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup Id(\{r_{x(x^*y)+y}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x(x^*y)+y}$  y  $g_{x^*y}$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x(x^*y)+y}, r_{x^*y})$
- $(v_1, v_2) \in R_1$
- $(v_1, v_2) \in R_2$
- $(r_{x^*y}, r_{x^*y})$
- $(v, v) \in Id(V_x)$
- $(v, v) \in Id(V_y)$

Por la construcción de  $g_{x(x^*y)+y}$  y de  $g_{x^*y}$  dada en la Definición 21 podemos observar que el tercer caso es verificado por la relación  $R_2$ ; además notemos que el subgrafo

indicado por la línea de puntos es isomorfo al segundo grafo y como consecuencia bisimular a éste, por lo que nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para los dos primeros casos. Es decir, queremos ver que:

$$\begin{aligned} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, S \cap V_{x(x^*y)+y}) &= \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, S \cap V_{x^*y}) \text{ y} \\ \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, S \cap V_{x(x^*y)+y}) &= \mu_{x^*y}(v_2, a, S \cap V_{x^*y}) \text{ con } (v_1, v_2) \in R_1 \\ \text{donde } S &\in (V_{x(x^*y)+y} \cup V_{x^*y})/R \text{ y } a \in A. \end{aligned}$$

Para ello procedemos de la siguiente forma:

**Subcaso 6.1.**  $(r_{x(x^*y)+y}, r_{x^*y})$

$$\begin{aligned} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, S \cap V_{x(x^*y)+y}) &= \\ \{ \text{porque } V_{x(x^*y)+y} &= V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\} \} \\ &= \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, S \cap (V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\})) = \\ \{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)+y} &\text{ para conjuntos} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\})} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, v') = \\ \{ \text{porque } V_{x(x^*y)}, V'_y \text{ y } \{r_{x(x^*y)+y}\} &\text{ son disjuntos de a pares} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap V_{x(x^*y)}} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V'_y} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, v') + \\ \sum_{v' \in S \cap \{r_{x(x^*y)+y}\}} \mu_{x(x^*y)+y}(r_{x(x^*y)+y}, a, v') &= \\ \{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)+y} \} & \\ &= \sum_{v' \in S \cap V_{x(x^*y)}} \pi \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') + 0 = \\ \{ \text{porque } V_{x(x^*y)} &= (V'_x \cup V_{x^*y}) - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap ((V'_x \cup V_{x^*y}) - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') = \\ \{ \text{porque } V'_x \cap V_{x^*y} &= \emptyset \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{x^*y}} \pi \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, v') + \\ \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') &= \\ \{ \text{porque si } S \cap V_{x^*y} \neq \emptyset &\text{ entonces por definición de } \mu_{x(x^*y)} \text{ sólo } \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, r_{x^*y}) > 0 \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu'_x(r'_x, a, v') + \pi \mu_{x(x^*y)}(r'_x, a, r_{x^*y}) + \\ \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') &= \\ \{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)} \} & \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu'_x(r'_x, a, v') + \pi \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') + \\ \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') &= \\ \{ \text{porque } \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') &= \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(r'_x, a, v') \} \\ &= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu'_x(r'_x, a, v') + \\ \pi (\sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(r'_x, a, v')) &+ \sum_{v' \in S \cap V'_y} (1 - \pi) \mu'_y(r'_y, a, v') = \\ \{ \text{porque } g'_x \sim^{pr} g_x \text{ atestiguado por } R_1 \text{ y } g'_y \sim^{pr} g_y &\text{ atestiguado por } R_2 \text{ y } S \cap ((V'_x \cup V_x) - \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\}) \text{ es clase de equivalencia de } R_1 \text{ y } S \cap (V'_y \cup V_y) \text{ es clase de equivalencia de } R_2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\pi \left( \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(r_x, a, v') \right) + \sum_{v' \in S \cap V_y} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{porque } \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(r_x, a, v') \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_y} (1 - \pi) \mu_y(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{x^*y} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, r_{x^*y}) + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } r_{x(x^*y)+y} \text{ y } r_{x^*y} \text{ estan en la misma clase de equivalencia} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x^*y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V - y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{x^*y} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, S \cap ((V_x \cup V - y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})) = \\
&\{ \text{porque } V_{x^*y} = (V_x \cup V - y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, S \cap V_{x^*y})
\end{aligned}$$

**Subcaso 6.2.**  $(v_1, v_2) \in R_1$

$$\begin{aligned}
&\mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, S \cap V_{x(x^*y)+y}) = \\
&\{ \text{porque } V_{x(x^*y)+y} = V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\} \} \\
&= \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, S \cap (V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\})) = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)+y} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x(x^*y)} \cup V'_y \cup \{r_{x(x^*y)+y}\})} \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{x(x^*y)}, V'_y \text{ y } \{r_{x(x^*y)+y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{x(x^*y)}} \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V'_y} \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{x(x^*y)+y}\}} \mu_{x(x^*y)+y}(v_1, a, v') = \\
&\{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)+y} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{x(x^*y)}} \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, v') + 0 + 0 = \\
&\{ \text{porque } V_{x(x^*y)} = (V'_x \cup V_{x^*y}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V'_x \cup V_{x^*y}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V'_x \cap V_{x^*y} = \emptyset \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{x^*y}} \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, v') = \\
&\{ \text{porque si } S \cap V_{x^*y} \neq \emptyset \text{ entonces por definición de } \mu_{x(x^*y)} \text{ sólo } \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, r_{x^*y}) > 0 \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu'_x(v_1, a, v') + \mu_{x(x^*y)}(v_1, a, r_{x^*y}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \text{por definición de } \mu_{x(x^*y)} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu'_x(v_1, a, v') + \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(v_1, a, v') = \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(v_1, a, v') \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu'_x(v_1, a, v') + \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } g'_x \sim^{pr} g_x \text{ atestiguado por } R_1 \text{ y porque } S \cap ((V'_x \cup V_x) - \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\}) \\
& \text{es clase de equivalencia de } R_1 \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_x(v_2, a, v') + \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{porque } \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(v_2, a, v') = \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(v_2, a, v') \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_x(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*y} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(v_2, a, v') + \mu_{x^*y}(v_2, a, r_{x^*y}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*y} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x^*y}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{x^*y}(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x^*y}\} \text{ son disjuntos de a pares } \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*y} \text{ para conjuntos } \} \\
& = \mu_{x^*y}(v_2, a, S \cap ((V_x \cup V_y) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})) = \\
& \{ \text{porque } V_{x^*y} = (V_x \cup V_y - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \mu_{x^*y}(v_2, a, S \cap V_{x^*y})
\end{aligned}$$

**Caso 7.** *prBKS2*:  $x^{*\pi}(y.z) = (x^{*\pi}y).z$

Por la Definición 21 los grafos asociados son:

$$g_{x^*(yz)} = \langle V_{x^*(yz)}, r_{x^*(yz)}, \mu_{x^*(yz)} \rangle,$$

$$g_{(x^*y)z} = \langle V_{(x^*y)z}, r_{(x^*y)z}, \mu_{(x^*y)z} \rangle, \text{ donde}$$

$$V_{x^*(yz)} = (V_x \cup V_{yz} \cup \{r_{x^*(yz)}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\},$$

$$V_{yz} = (V_y \cup V_z) - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\},$$

$$V_{(x^*y)z} = (V_{x^*y} \cup V_z) - \{v \in V_{x^*y} \mid \text{endpoint}(v)\} \text{ y}$$

$$V_{x^*y} = (V_x \cup V_y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}$$

La Figura 5.8 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x^*(yz)}$  y  $g_{(x^*y)z}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$ , la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$  y la etiquetada con  $Id(V_z)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_z$ .

Mostramos que

$$R = \{(r_{x^*(yz)}, r_{x^*y}), (r_{x^*y}, r_{x^*(yz)})\} \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup Id(V_z) \cup Id(\{r_{x^*(yz)}, r_{x^*y}\})$$



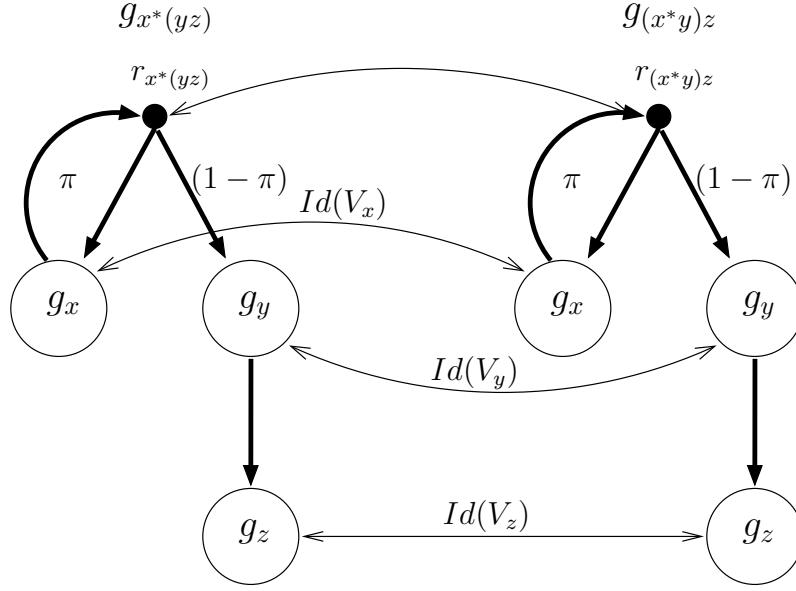


Figura 5.8: Esquema de relación de bisimulación

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x^*(yz)}$  y  $g_{(x^*y)z}$ . Sólo nos queda ver que se cumple la segunda condición de la bisimulación para las raíces, pues para el resto de los vértices es fácil ver que por la relación de identidad también se cumple la condición. Es decir, queremos ver que  $\mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, S \cap V_{x^*(yz)}) = \mu_{(x^*y)z}(r_{(x^*y)z}, a, S \cap V_{(x^*y)z})$  donde  $S \in (V_{x^*(yz)} \cup V_{(x^*y)z})/R$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, S \cap V_{x^*(yz)}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(yz)} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{x^*(yz)}} \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x^*(yz)} = (V_x \cup V_{yz} \cup \{r_{x^*(yz)}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_{yz} \cup \{r_{x^*(yz)}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, v') = \\
& \{ \text{porque que } V_x, V_{yz} \text{ y } \{r_{x^*(yz)}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*(yz)}\}} \mu_{x^*(yz)}(r_{x^*(yz)}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(yz)} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{yz}} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \\
& \pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{yz} = (V_y \cup V_z) - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap ((V_y \cup V_z) - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \\
& \pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_y \cap V_z = \emptyset \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \\
&\{ \text{porque si } S \cap V_z \neq \emptyset \text{ entonces por definici3n de } \mu_{yz} \text{ s3lo } \mu_{yz}(r_y, a, r_z) > 0 \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \\
&\pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') + (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, r_z) = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{yz} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} (1 - \pi) \mu_{yz}(r_y, a, v') + \\
&\pi \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') + (1 - \pi) \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(r_y, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{x^*y} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \\
&\mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, r_{x^*y}) + \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } r_{x^*(yz)} \text{ y } r_{x^*y} \text{ est3n en la misma clase de equivalencia } \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{(x^*y)z} \text{ y dado que } \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\} = \{v \in V_{x^*y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&\} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, r_z) = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{(x^*y)z} \text{ y dado que consideramos a } \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, r_z) \text{ para el caso de} \\
&\text{que } S \cap V_z \neq \emptyset \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_x, V_y, V_z \text{ y } \{r_{x^*y}\} \text{ son disjuntos de a pares entonces } (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\}) \cup \\
&(V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\}) \cup \{r_{x^*y}\} \cup V_z = (((V_x \cup V_y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\}) - \\
&\{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\}) \cup V_z = (V_{x^*y} \cup V_z) - \{v \in V_{x^*y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_{x^*y} \cup V_z) - \{v \in V_{x^*y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{(x^*y)z} = (V_{x^*y} \cup V_z) - \{v \in V_{x^*y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{(x^*y)z}} \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{(x^*y)z} \text{ para conjuntos } \} \\
&= \mu_{(x^*y)z}(r_{x^*y}, a, S \cap V_{(x^*y)z})
\end{aligned}$$

**Caso 8.** *prBKS3:*  $x^{*\pi\rho}(y((x + \rho y)^{*\pi} z) + \frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho} z) = (x + \rho y)^{*\pi} z$

Sean

$$\begin{aligned}
g_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} &= g_x'^{* \pi} g_{y((x+y)^*z)+z} \\
g_{y((x+y)^*z)+z} &= g_y((x+y)^*z) + \frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho} g_z' \\
g_{y((x+y)^*z)} &= g_y' \cdot g_{(x+y)^*z} \\
g_{(x+y)^*z} &= g_{x+y}^{\pi} g_z \\
g_{x+y} &= g_x + \rho g_y
\end{aligned}$$

donde  $g_x', g_x$  son grafos representativos del proceso  $x$ ,  $g_y', g_y$  son grafos representativos del proceso  $y$  y  $g_z', g_z$  son grafos representativos del proceso  $z$ .

Por la Definición 21 los grafos mencionados tienen la forma:

$$\begin{aligned}
g_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} &= \langle V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \rangle \\
g_{y((x+y)^*z)+z} &= \langle V_{y((x+y)^*z)+z}, r_{y((x+y)^*z)+z}, \mu_{y((x+y)^*z)+z} \rangle \\
g_{y((x+y)^*z)} &= \langle V_{y((x+y)^*z)}, r_y', \mu_{y((x+y)^*z)} \rangle \\
g_{(x+y)^*z} &= \langle V_{(x+y)^*z}, r_{(x+y)^*z}, \mu_{(x+y)^*z} \rangle \\
g_{x+y} &= \langle V_{x+y}, r_{x+y}, \mu_{x+y} \rangle \\
g_x' &= \langle V_x', r_x', \mu_x' \rangle \\
g_y' &= \langle V_y', r_y', \mu_y' \rangle \\
g_z' &= \langle V_z', r_z', \mu_z' \rangle \\
g_x &= \langle V_x, r_x, \mu_x \rangle \\
g_y &= \langle V_y, r_y, \mu_y \rangle \\
g_z &= \langle V_z, r_z, \mu_z \rangle
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} &= (V_x' \cup V_{y((x+y)^*z)+z} \cup \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}) - \{v \in V_x' | \text{endpoint}(v)\}) \\
V_{y((x+y)^*z)+z} &= V_{y((x+y)^*z)} \cup V_z' \cup \{r_{y((x+y)^*z)+z}\} \\
V_{y((x+y)^*z)} &= (V_y' \cup V_{(x+y)^*z}) - \{v \in V_y' | \text{endpoint}(v)\} \\
V_{(x+y)^*z} &= (V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)^*z}\}) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\} \\
V_{x+y} &= (V_x \cup V_y) \cup \{r_{x+y}\}
\end{aligned}$$

La Figura 5.9 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}$  y  $g_{(x+y)^*z}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $R_1$  es la relación de bisimulación entre  $g_x'$  y  $g_x$ , la etiquetada con  $R_2$  es la relación de bisimulación entre  $g_y'$  y  $g_y$ , la etiquetada con  $R_3$  es la relación de bisimulación entre  $g_z'$  y  $g_z$ , la siguiente relaciona la raíz del subgrafo  $g_{(x+y)^*z}$  indicado por la línea de puntos con la raíz del segundo grafo, la etiquetada con  $Id(V_x)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_x$ , la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$  y la etiquetada con  $Id(V_z)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_z$ .

Mostramos que

$$R = \{(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, r_{(x+y)^*z}), (r_{(x+y)^*z}, r_{x^*(y((x+y)^*z)+z})\} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup Id(V_x) \cup Id(V_y) \cup Id(V_z) \cup Id(\{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}), r_{(x+y)^*z}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}$  y  $g_{(x+y)^*z}$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}), r_{(x+y)^*z})$
- $(v_1, v_2) \in R_1$

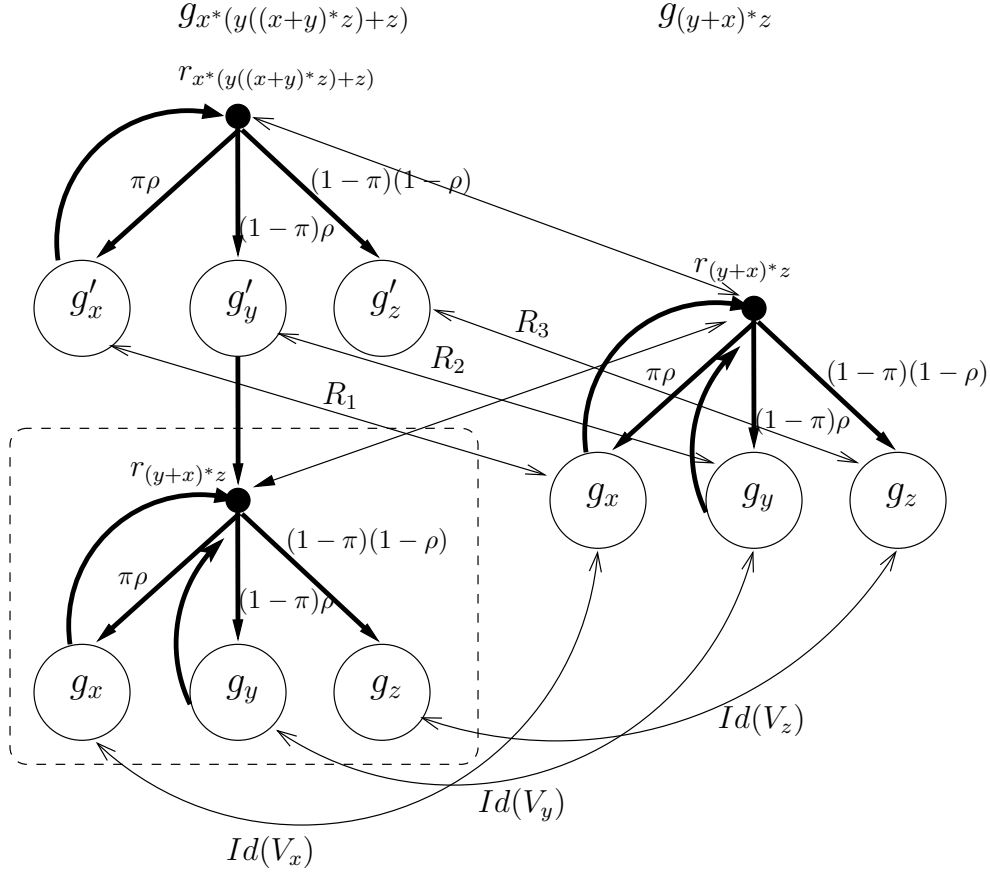


Figura 5.9: Esquema de relación de bisimulación

- $(v_1, v_2) \in R_2$
- $(v_1, v_2) \in R_3$
- $(r_{(x+y)^*z}, r_{(x+y)^*z})$
- $(v, v) \in Id(V_x)$
- $(v, v) \in Id(V_y)$
- $(v, v) \in Id(V_z)$

Por la construcción de  $g_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}$  y de  $g_{(x+y)^*z}$  dada en la Definición 21 podemos observar que se cumple la condición para el segundo y el cuarto caso, además notemos que el subgrafo indicado por la línea de puntos es isomorfo al segundo grafo y como consecuencia bisimilar a éste, por lo que nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para el primer y tercer caso. Es decir, queremos ver que:

$$\mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}) = \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, S \cap V_{(x+y)^*z})$$

$$\mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}) = \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, S \cap V_{(x+y)^*z}) \text{ con } (v_1, v_2) \in R_1$$

donde  $S \in (V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \cup V_{(x+y)^*z})/R$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Caso 9. } (r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, r_{(x+y)^*z}) \\
& \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z})) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} = (V'_x \cup V_{y((x+y)^*z)+z} \cup \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V'_x \cup V_{y((x+y)^*z)+z} \cup \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \\
& \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V'_x, V_{y((x+y)^*z)+z} \text{ y } \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)+z}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(r_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)+z}} (1 - \pi \rho) \mu_{y((x+y)^*z)+z}(r_{y((x+y)^*z)+z}, a, v') + \\
& \pi \rho \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{y((x+y)^*z)+z} = V_{y((x+y)^*z)} \cup V'_z \cup \{r_{y((x+y)^*z)+z}\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap (V_{y((x+y)^*z)} \cup V'_z \cup \{r_{y((x+y)^*z)+z}\})} (1 - \pi \rho) \mu_{y((x+y)^*z)+z}(r_{y((x+y)^*z)+z}, a, v') + \\
& \pi \rho \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } (V_{y((x+y)^*z)}, V'_z \text{ y } \{r_{y((x+y)^*z)+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)}} (1 - \pi \rho) \mu_{y((x+y)^*z)+z}(r_{y((x+y)^*z)+z}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi \rho) \mu_{y((x+y)^*z)+z}(r_{y((x+y)^*z)+z}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap \{r_{y((x+y)^*z)+z}\}} (1 - \pi \rho) \mu_{y((x+y)^*z)+z}(r_{y((x+y)^*z)+z}, a, v') + \\
& \pi \rho \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{y((x+y)^*z)+z} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)}} (1 - \pi \rho) \left( \frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho} \right) \mu_{y((x+y)^*z)}(r'_y, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi \rho) \left( 1 - \frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho} \right) \mu'_z(r'_z, a, v') + 0 + \\
& \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{y((x+y)^*z)} = (V'_y \cup V_{(x+y)^*z}) - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap ((V'_y \cup V_{(x+y)^*z}) - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu_{y((x+y)^*z)}(r'_y, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi) \mu'_z(r'_z, a, v') + \\
& \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V'_y \cap V_{(x+y)^*z} = \emptyset \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu_{y((x+y)*z)}(r'_y, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_{(x+y)*z}} \pi (1 - \rho) \mu_{y((x+y)*z)}(r'_y, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi) \mu'_z(r'_z, a, v') + \\
&\sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
&\{ \text{porque si } S \cap V_{(x+y)*z} \neq \emptyset \text{ entonces por definici3n de } \mu_{y((x+y)*z)} \text{ s3lo } \mu_{y((x+y)*z)}(r'_y, a, r_{(x+y)*z}) > \\
&0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu'_y(r'_y, a, v') + \\
&\pi (1 - \rho) \mu_{y((x+y)*z)}(r'_y, a, r_{(x+y)*z}) + \\
&\sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi) \mu'_z(r'_z, a, v') + \\
&\pi \rho \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{y((x+y)*z)} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu'_y(r'_y, a, v') + \\
&\pi (1 - \rho) \sum_{v' \in V'_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_y(r'_y, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi) \mu'_z(r'_z, a, v') + \\
&\pi \rho \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \\
&\{ \text{porque } \sum_{v' \in V'_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_y(r'_y, a, v') = \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) | \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V'_y} \mu'_y(r'_y, a, v') \\
&y \sum_{v' \in V'_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_x(r'_x, a, v') = \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(r'_x, a, v') \\
&\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu'_x(r'_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu'_y(r'_y, a, v') + \\
&\pi (1 - \rho) (\sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) | \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V'_y} \mu'_y(r'_y, a, v')) + \\
&\sum_{v' \in S \cap V'_z} (1 - \pi) \mu'_z(r'_z, a, v') + \\
&\pi \rho (\sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V'_x} \mu'_x(r'_x, a, v')) =
\end{aligned}$$

*{ porque } g'\_y \sim^{pr} g\_y \text{ atestiguado por } R\_2, g'\_x \sim^{pr} g\_x \text{ atestiguado por } R\_1 \text{ y } g'\_z \sim^{pr} g\_z \text{ atestiguado por } R\_3; y S \cap ((V'\_x \cup V\_x) - \{v \in (V'\_x \cup V\_x) | \text{endpoint}(v)\}) \text{ es clase de equivalencia de } R\_1 \text{ o es vac3a, } S \cap ((V'\_y \cup V\_y) - \{v \in (V'\_y \cup V\_y) | \text{endpoint}(v)\}) \text{ es clase de equivalencia de } R\_2 \text{ o es vac3a y } S \cap (V'\_z \cup V\_z) \text{ es clase de equivalencia de } R\_3 \text{ o es vac3a}*

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu_y(r_y, a, v') + \\
&\pi (1 - \rho) (\sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) | \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V_y} \mu_y(r_y, a, v')) + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_z(r_z, a, v') + \\
&\pi \rho (\sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(r_x, a, v')) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{ \text{porque } \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(r_y, a, v') = \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) | \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V_y} \mu_y(r_y, a, v') \\
&y \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \sum_{S_x \in \{v \in (V'_x \cup V_x) | \text{endpoint}(v)\} / R_1} \sum_{v' \in S_x \cap V_x} \mu_x(r_x, a, v') \\
&\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \rho \mu_x(r_x, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi (1 - \rho) \mu_y(r_y, a, v') + \\
&\pi (1 - \rho) \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(r_y, a, v') +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_z(r_z, a, v') + \\
& \pi \rho \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, r_{(x+y)^*z}) + \sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_z(r_z, a, v') + \\
& \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_x \cap V_y = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) - \{v \in (V_x \cup V_y) | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_z(r_z, a, v') + \sum_{v' \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \wedge \text{endpoint}(v')} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \pi \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_z} (1 - \pi) \mu_z(r_z, a, v') + \pi \sum_{v' \in V_{x+y} \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)^*z} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') + \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, r_{(x+y)^*z}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)^*z} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{(x+y)^*z}\}} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x+y}, V_z \text{ y } \{r_{(x+y)^*z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)^*z}\}) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{(x+y)^*z} = (V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)^*z}\}) - \{v \in V_{x+y} | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{(x+y)^*z}} \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)^*z} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu_{(x+y)^*z}(r_{(x+y)^*z}, a, S \cap V_{(x+y)^*z})
\end{aligned}$$

**Caso 10.**  $(v_1, v_2) \in R_2$

$$\begin{aligned}
& \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} = (V'_x \cup V_{y((x+y)^*z)+z} \cup \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\} \} \\
& \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V'_x \cup V_{y((x+y)^*z)+z} \cup \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}) - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V'_x, V_{y((x+y)^*z)+z} \text{ y } \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_x - \{v \in V'_x | \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)+z}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*(y((x+y)^*z)+z}\}} \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x^*(y((x+y)^*z)+z)} \} \\
& = 0 + \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)+z}} \mu_{y((x+y)^*z)+z}(v_1, a, v') + 0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \text{porque } V_{y((x+y)^*z)+z} = V_{y((x+y)^*z)} \cup V'_z \cup \{r_{y((x+y)^*z)+z}\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{y((x+y)^*z)} \cup V'_z \cup \{r_{y((x+y)^*z)+z}\})} \mu_{y((x+y)^*z)+z}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{y((x+y)^*z)}, V'_z \text{ y } \{r_{y((x+y)^*z)+z}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)}} \mu_{y((x+y)^*z)+z}(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V'_z} \mu_{y((x+y)^*z)+z}(v_1, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap \{r_{y((x+y)^*z)+z}\}} \mu_{y((x+y)^*z)+z}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{y((x+y)^*z)+z} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{y((x+y)^*z)}} \mu_{y((x+y)^*z)}(v_1, a, v') + 0 + 0 = \\
& \{ \text{porque } V_{y((x+y)^*z)} = V'_y \cup V_{(x+y)^*z} - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_y \cup V_{(x+y)^*z} - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{y((x+y)^*z)}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V'_y \cap V_{(x+y)^*z} = \emptyset \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{y((x+y)^*z)}(v_1, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_{(x+y)^*z}} \mu_{y((x+y)^*z)}(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{y((x+y)^*z)} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu'_y(v_1, a, v') + \mu_{y((x+y)^*z)}(v_1, a, r_{(x+y)^*z}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{y((x+y)^*z)} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu'_y(v_1, a, v') + \sum_{v' \in V'_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_y(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } \sum_{v' \in V'_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu'_y(v_1, a, v') = \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V'_y} \mu'_y(v_1, a, v') \} \\
& \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V'_y - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu'_y(v_1, a, v') + \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V'_y} \mu'_y(v_1, a, v') = \\
& \{ \text{porque } g'_y \sim^{pr} g_y \text{ atestado por } R_2 \text{ y } S \cap (V'_y - \{v \in V'_y \mid \text{endpoint}(v)\}) \text{ y } S_y \cap V'_y \text{ son} \\
& \text{clases de equivalencia de } R_2 \text{ donde una de las dos es vacía o las dos son vacías a la vez} \\
& \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_y(v_2, a, v') + \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V_y} \mu_y(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{porque } \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(v_2, a, v') = \sum_{S_y \in \{v \in (V'_y \cup V_y) \mid \text{endpoint}(v)\} / R_2} \sum_{v' \in S_y \cap V_y} \mu_y(v_2, a, v') \} \\
& \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_y(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_y(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_y - \{v \in V_y \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_y \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \\
& \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \\
& \sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \mu_{x+y}(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de a pares} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) - \{v \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \\
& \sum_{v' \in (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\}) \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x+y}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in V_{x+y} \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_{x+y}(v_2, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{(x+y)^*z} \}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') + \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, r_{(x+y)^*z}) + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{(x+y)^*z} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap (V_{x+y} - \{v \in V_{x+y} \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{(x+y)^*z}\}} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') + \\
&\sum_{v' \in S \cap V_z} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{x+y}, V_z \text{ y } \{r_{(x+y)^*z}\} \text{ son disjuntos de a pares } \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap ((V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)^*z}\}) - \{v \in V_{x+y} \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') = \\
&\{ \text{porque } V_{(x+y)^*z} = (V_{x+y} \cup V_z \cup \{r_{(x+y)^*z}\}) - \{v \in V_{x+y} \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{(x+y)^*z}} \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, v') = \\
&\{ \text{por definici3n de } \mu_{(x+y)^*z} \text{ para conjuntos } \} \\
&= \mu_{(x+y)^*z}(v_2, a, S \cap V_{(x+y)^*z})
\end{aligned}$$

□

## Capítulo 6

# Álgebra básica de procesos probabilistas con iteración infinita $pr\mathcal{BPA}^\omega$

Hasta aquí hemos tratado con álgebras que modelan procesos simples tales como acciones atómicas, procesos que contienen alternativas de ejecución y procesos que se ejecutan secuencialmente. También trabajamos con álgebras que incluyen procesos con comportamiento iterativo. Además estudiamos algunas de las versiones probabilistas existentes -una de cuyas propiedades principales es resolver el no determinismo de los procesos con alternativas de ejecución- y construimos nuestra versión probabilista de procesos iterativos. Una característica importante de las álgebras consideradas es que no modelan procesos con comportamiento posiblemente infinito. En este capítulo nuestro interés es el de modelar procesos que incluyen este tipo de comportamiento (posiblemente infinito) y procesos en que la ejecución de alguna de sus alternativas no está prevista por el sistema. Para esto construimos una nueva álgebra de procesos probabilista que llamaremos  $pr\mathcal{BPA}^\omega$ , donde extenderemos el dominio de las probabilidades como parámetros en los operadores  $+_\pi$  y  $*_\pi$  a  $[0, 1]$ , es decir, incluyendo a 0 y 1.

### 6.1. Signatura de $pr\mathcal{BPA}^\omega$

La Signatura de  $pr\mathcal{BPA}^\omega$  contiene los operadores de  $pr\mathcal{BPA}^*$  incluyendo en el rango de probabilidades a la probabilidad 0 y 1; y un nuevo operador unario denominado  $^\omega$ . Denotando al conjunto de las constantes con la letra  $A$  presentamos formalmente esta signatura en la siguiente definición:

**Definición 23.** *La signatura  $\Sigma(pr\mathcal{BPA}^\omega)$  contiene las constantes  $a \in A$ , los operadores binarios  $(+_\pi)_{\pi \in [0,1]}$ ,  $\cdot$  y  $(*_\pi)_{\pi \in [0,1]}$ ; y el operador unario  $^\omega$ .*

Intuitivamente la expresión  $x+_1y$  representa el proceso que ejecuta  $x$  con probabilidad 1 e  $y$  con probabilidad 0; es decir que éste proceso en realidad ejecutará  $x$  y luego terminará. Siguiendo la misma idea la expresión  $x+_0y$ , representa el proceso que ejecuta  $x$  con probabilidad 0 e  $y$  con probabilidad 1; esto indica que esta expresión en realidad ejecutará  $y$  y luego terminará. La expresión  $x^*_1y$  representa el proceso que ejecuta  $x$  con probabilidad 1 y vuelve al estado inicial o ejecuta  $y$  con probabilidad 0 y luego termina. Es decir que este

proceso ejecutará  $x$  repetidamente, y el comportamiento de  $y$  es irrelevante: de aquí que nos encontremos ante un comportamiento infinito dando lugar al proceso que representaremos con la expresión  $x^\omega$ .

**Ejemplo 36.** Retomemos el ejemplo 27, que modela la reproducción de una célula hasta que en algún momento produce la primer célula mala, con lo que el proceso termina. Ampliemos ahora este proceso modelando el incremento poblacional de células malas, es decir que el nuevo proceso continúa después de que el sistema produce la primer célula mala. Veamos el comportamiento del sistema con el siguiente proceso:

$$IPCM = (\text{buena}^{*\pi} \text{mala})^\omega$$

## 6.2. Semántica

Como modelo para esta teoría seguiremos empleando el modelo de grafos probabilistas presentado en el capítulo anterior y procederemos a dar la interpretación de los términos en el modelo como antes. Para los operadores  $+\pi$ ,  $\cdot$  y  $^{*\pi}$  es igual que antes pero ahora con 0 y 1 incluidos el dominio de  $\pi$ , por lo que sólo agregamos la definición siguiente para el operador  $\omega$ :

**Definición 24.** Sea  $g_1$  el grafo de proceso probabilista del término  $t_1$  tal que  $g_1 = \langle V_1, r_1, \mu_1 \rangle$  y dado  $A$  un conjunto de acciones. Definimos el operador  $\omega$  en el modelo de grafos como sigue:

- Denotamos al grafo del término  $t_1^\omega$  con  $g_1^\omega$  y lo definimos como  $\langle (V_1 - \{v \in V_1 | \text{endpoint}(v)\}), r_1, \mu \rangle$  donde
 
$$\mu(v, a, v') = \mu_1(v, a, v') \text{ si } v, v' \in V_1 \wedge \text{not}(\text{endpoint}(v'))$$

$$\mu(v, a, r_1) = \sum_{v' \in V_1 \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_1(v, a, v') \text{ si } v \in V_1$$

**Ejemplo 37.** En la Figura 6.1 tenemos un grafo de proceso al que le aplicamos el operador  $\omega$  obteniendo el grafo de la Figura 6.2. Con la primera ecuación de la definición quitamos los endpoints del primer grafo y conectamos los nodos que iban a endpoints directamente a la raíz; sumando las probabilidades para cada acción que tenían en el grafo original. La segunda ecuación nos indica que para el resto de los nodos la función de distribución tiene los mismos valores que en el grafo original.

**Ejemplo 38.** En la Figura 6.3 tenemos el grafo del ejemplo 27 y en la Figura 6.4 tenemos el grafo correspondiente al proceso del ejemplo 36 que modela el incremento poblacional de células malas; donde tomamos el primer grafo y le aplicamos el operador  $\omega$ . Observemos que en el grafo las transiciones con valor de probabilidad cero no aparecen dibujadas, tampoco indicamos la probabilidad cuando es igual a 1. La función de distribución  $\mu$  está definida como sigue:

$$\begin{aligned} \mu(r, \text{buena}, r) &= \pi \\ \mu(r, \text{mala}, r) &= 1 - \pi \end{aligned}$$

los otros casos son iguales a 0.

### 6.2.1. Congruencia

La prueba de congruencia extiende a los operadores  $+_0$ ,  $+_1$ ,  $^{*0}$ ,  $^{*1}$  y por el axioma *prEx2* (en la siguiente sección) también extiende a  $\omega$ .

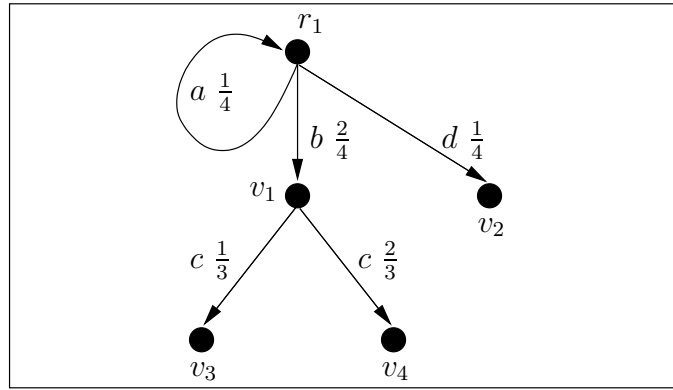


Figura 6.1: Ejemplo de aplicación de omega a un grafo.

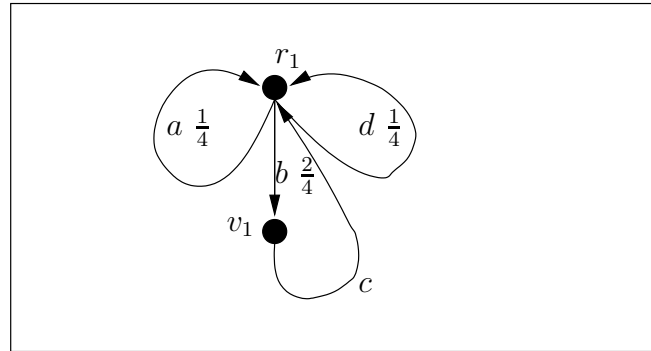


Figura 6.2: Ejemplo de aplicación de omega a un grafo.

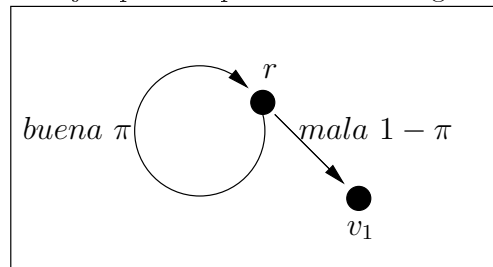


Figura 6.3: Grafo que modela la reproducción celular

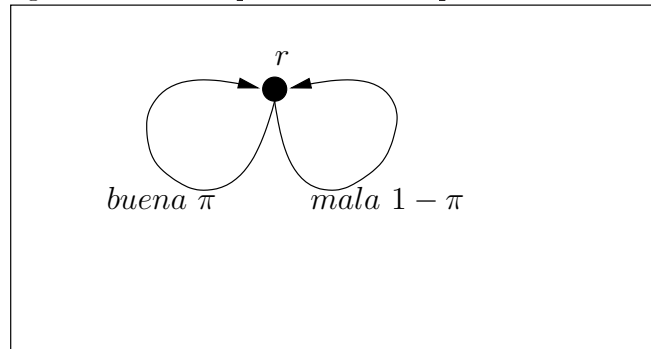


Figura 6.4: Grafo que modela el incremento poblacional de células malas

### 6.3. Teoría Ecuacional de $pr\mathcal{BPA}^\omega$

El Cuadro 6.1 contiene un sistema de axiomas para  $pr\mathcal{BPA}^\omega$ . Este sistema está compuesto por los axiomas de  $pr\mathcal{BPA}^*$  y dos nuevos axiomas llamados  $prEx1$  y  $prEx2$  para el operador  $\omega$ . Las variables  $x, y$  y  $z$  en los axiomas toman valores de la colección de términos de procesos.

$pr\mathcal{BPA}^\omega$		
$x, y, z;$		
$x +_\pi y$	$= y +_{(1-\pi)} x$	$prA1$
$x +_\pi (y +_\rho z)$	$= (x +_{\frac{\pi}{(\pi+\rho-\pi\rho)}} y) +_{\pi+\rho-\pi\rho} z$	$prA2$
$x +_\pi x$	$= x$	$prA3$
$(x +_\pi y).z$	$= x.z +_\pi y.z$	$prA4$
$(x.y).z$	$= x.(y.z)$	$prA5$
$x.(x^{*\pi}y) +_\pi y$	$= x^{*\pi}y$	$prBKS1$
$x^{*\pi}(y.z)$	$= (x^{*\pi}y).z$	$prBKS2$
$x^{*\pi\rho}(y.((x +_\rho y)^{*\pi}z) +_{\frac{\pi(1-\rho)}{1-\pi\rho}} z)$	$= (x +_\rho y)^{*\pi}z$	$prBKS3$
$x +_0 y$	$= y$	$prEx1$
$x^{*1}y$	$= x^\omega$	$prEx2$

Cuadro 6.1: La teoría ecuacional  $pr\mathcal{BPA}^\omega = (\Sigma_{pr\mathcal{BPA}^\omega}, \mathcal{E}_{pr\mathcal{BPA}^\omega})$

El axioma  $prEx1$  expresa que la elección con probabilidad 0 entre el proceso  $x$  y el proceso  $y$  es lo mismo que ejecutar sólo el proceso  $y$ . El axioma  $prEx2$  expresa que iterar sobre el proceso  $x$  con probabilidad 1 o ejecutar el proceso  $y$  con probabilidad 0 es lo mismo que ejecutar el proceso  $x$  infinitas veces.

**Proposición 5.** *Las siguientes igualdades se cumplen en  $pr\mathcal{BPA}^\omega$ :*

1.  $x +_1 y = x$
2.  $x^{*1}y = x.(x^{*1}y)$
3.  $x^{*0}y = y$
4.  $x^\omega = x.x^\omega$
5.  $x^\omega.y = x^\omega$

*Demostración de 1.:*

$$\begin{aligned} x +_1 y &= y +_0 x && (prA1) \\ &= x && (prEx1) \end{aligned}$$

*Demostración de 2.:*

$$\begin{aligned} x^{*1}y &= x.(x^{*1}y) +_1 y && (prBKS1) \\ &= x.(x^{*1}y) && (1) \end{aligned}$$

*Demostración de 3.:*

$$\begin{aligned} x^{*0}y &= x.(x^{*0}y) +_0 y && (\text{prBKS1}) \\ &= y && (\text{prEx1}) \end{aligned}$$

*Demostración de 4.:*

$$\begin{aligned} x^\omega &= x^{*1}y && (\text{prEx2}) \\ &= x.(x^{*1}y) && (2) \\ &= x.x^\omega && (\text{prEx2}) \end{aligned}$$

*Demostración de 5.:*

$$\begin{aligned} x^\omega.y &= (x^{*1}z).y && (\text{prEx2}) \\ &= x^{*1}(zy) && (\text{prBKS2}) \\ &= x^\omega && (\text{prEx2}) \end{aligned}$$

### 6.3.1. Consistencia

En esta sección extenderemos la prueba de consistencia para la teoría  $\text{prBPA}^\omega$ . Mostrando de esta forma que  $\text{prBPA}^\omega$  también es una axiomatización consistente. Al igual que antes vimos que la relación de bisimulación probabilista es una congruencia para los operadores  $+_0$ ,  $+_1$ ,  $^{*0}$ ,  $^{*1}$  y  $\omega$ , por lo que nos basta probar la consistencia para los axiomas  $\text{prEx1}$  y  $\text{prEx2}$ .

Prueba: Denotaremos con  $g_t$  al grafo asociado al término  $t$ , y daremos en cada caso la descripción de los grafos asociados a los términos de los axiomas.

**Caso 1.**  $\text{prEx1}$ :  $x +_0 y = y$

Por la Definición 24 los grafos asociados son:

$$\begin{aligned} g_{x+y} &= \langle V_{x+y}, r_{x+y}, \mu_{x+y} \rangle \text{ con } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \text{ y} \\ g_y &= \langle V_y, r_y, \mu_y \rangle \end{aligned}$$

La Figura 6.5 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x+y}$  y  $g_y$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $\text{Id}(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$ .

Mostramos que

$$R = \{(r_{x+y}, r_y), (r_y, r_{x+y})\} \cup \text{Id}(V_y) \cup \text{Id}(\{r_{x+y}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x+y}$  y  $g_y$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x+y}, r_y)$
- $(v, v) \in \text{Id}(V_y)$

Por la construcción de  $g_{x+y}$  dada en la Definición 21 vemos que el segundo caso es verificado por la relación  $\text{Id}(V_y)$ . Entonces sólo nos queda mostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para  $(r_{x+y}, r_y)$ , es decir, queremos probar que:  $\mu_{x+y}(r_{x+y}, a, S \cap V_{x+y}) = \mu_y(r_y, a, S \cap V_y)$ , donde  $S \in (V_{x+y} \cup V_y)/R$  y  $a \in A$ .

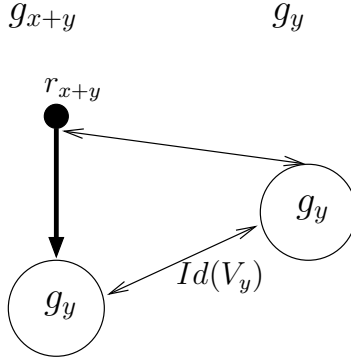


Figura 6.5: Esquema de relación de bisimulación

Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, S \cap V_{x+y}) = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \text{ para conjuntos} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_{x+y}} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_{x+y} = V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap (V_x \cup V_y \cup \{r_{x+y}\})} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{porque } V_x, V_y \text{ y } \{r_{x+y}\} \text{ son disjuntos de a pares y propiedades de la sumatoria} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_x} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x+y}\}} \mu_{x+y}(r_{x+y}, a, v') = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_{x+y} \} \\
& = \sum_{v' \in S \cap V_x} 0 \cdot \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} 1 \cdot \mu_y(r_y, a, v') + 0 = \\
& \{ \text{por definición de } \mu_y \text{ para conjuntos} \} \\
& = \mu_y(r_y, a, S \cap V_y)
\end{aligned}$$

**Caso 2.** *prEx2*:  $x_1^*y = x^\omega$

Por la Definición 24 los grafos asociados son:

$$\begin{aligned}
g_{x^*y} &= \langle V_{x^*y}, r_{x^*y}, \mu_{x^*y} \rangle \text{ con } V_{x^*y} = (V_x \cup V_y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\} \text{ y} \\
g_{x^\omega} &= \langle V_{x^\omega}, r_x, \mu_{x^\omega} \rangle \text{ con } V_{x^\omega} = V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}
\end{aligned}$$

La Figura 6.6 nos muestra un esquema de los grafos  $g_{x^*y}$  y  $g_{x^\omega}$ ; y nos permite ver una posible relación de bisimulación. Las flechas horizontales indican las relaciones: la superior relaciona las raíces de los grafos, la etiquetada con  $Id(V_y)$  es la relación de bisimulación entre los nodos de  $g_y$ .

Mostramos que

$$R = \{(r_{x^*y}, r_x), (r_x, r_{x^*y})\} \cup Id(V_x) \cup Id(\{r_{x^*y}\})$$

es una bisimulación probabilista entre  $g_{x^*y}$  y  $g_{x^\omega}$ . Primero observemos que  $R$  es una relación de equivalencia. Vemos que se cumple la primera condición de la Definición 22 (de bisimulación); entonces nos queda probar la segunda condición para los casos:

- $(r_{x^*y}, r_x)$

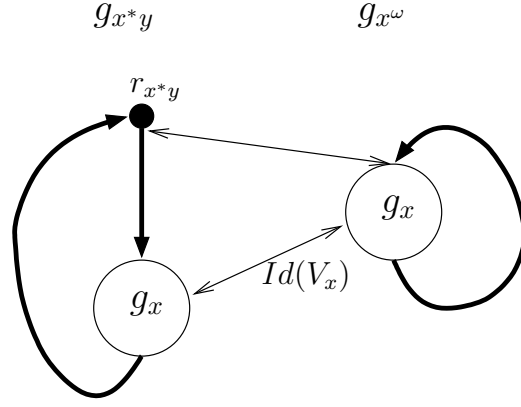


Figura 6.6: Esquema de relación de bisimulación

- $(v, v) \in Id(V_x)$

Aquí necesitaremos demostrar que la segunda condición de bisimulación se cumple para los dos casos, es decir, queremos probar que:

$$\mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, S \cap V_{x^*y}) = \mu_{x^\omega}(r_x, a, S \cap V_{x^\omega}) \text{ y}$$

$\mu_{x^*y}(v, a, S \cap V_{x^*y}) = \mu_{x^\omega}(v, a, S \cap V_{x^\omega})$  con  $(v, v) \in Id(V_x)$ , donde  $S \in (V_{x^*y} \cup V_{x^\omega})/R$  y  $a \in A$ .

Para ello procedemos de la siguiente forma:

**Caso 3.**  $(r_{x^*y}, r_x)$

$$\mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, S \cap V_{x^*y}) =$$

{por definición de  $\mu_{x^*y}$  para conjuntos }

$$= \sum_{v' \in S \cap V_{x^*y}} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') =$$

{porque  $V_{x^*y} = (V_x \cup V_y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\}$  }

$$= \sum_{v' \in S \cap ((V_x \cup V_y \cup \{r_{x^*y}\}) - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') =$$

{porque  $V_x, V_y$  y  $\{r_{x^*y}\}$  son disjuntos de a pares y propiedades de la sumatoria }

$$= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_{x^*y}\}} \mu_{x^*y}(r_{x^*y}, a, v') =$$

{por definición de  $\mu_{x^*y}$  }

$$= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} 1 \cdot \mu_x(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap V_y} 0 \cdot \mu_y(r_y, a, v') + 1 \cdot \sum_{v' \in V_x \wedge \text{endpoint}(v')} \mu_x(r_x, a, v') =$$

{por definición de  $\mu_{x^\omega}$  }

$$= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^\omega}(r_x, a, v') + \mu_{x^\omega}(r_x, a, r_x) =$$

{por definición de  $\mu_{x^\omega}$  y dado que  $r_{x^\omega}$  y  $r_x$  están en la misma clase de equivalencia entonces  $S \cap \{r_x\} = \{r_x\}$  y por propiedades de la sumatoria }

$$= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^\omega}(r_x, a, v') + \sum_{v' \in S \cap \{r_x\}} \mu_{x^\omega}(r_x, a, v') =$$

{por propiedades de la sumatoria y dado que sólo una de las intersecciones es distinta de vacío a la vez }



$$\begin{aligned}
&= \sum_{v' \in S \cap (V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\})} \mu_{x^\omega}(r_x, a, v') = \\
&\quad \{ \text{porque } V_{x^\omega} = V_x - \{v \in V_x \mid \text{endpoint}(v)\} \} \\
&= \sum_{v' \in S \cap V_{x^\omega}} \mu_{x^\omega}(r_x, a, v') = \\
&\quad \{ \text{por definición de } \mu_{x^\omega} \text{ para conjuntos} \} \\
&= \mu_{x^\omega}(r_x, a, S \cap V_x)
\end{aligned}$$

**Caso 4.**  $(v, v) \in Id(V_x)$

*Esta demostración es muy similar a la anterior.*

## 6.4. $pr\mathcal{BPA}^\omega + RSP$

Retomemos el grafo de la Figura 6.4 del proceso del ejemplo 36. Recordemos que es el proceso:

$$IPCM = (\text{buena}^* \pi \text{mala})^\omega$$

Podemos observar que este proceso es el mismo que el proceso:

$$IPCM2 = (\text{buena} +_\pi \text{mala})^\omega$$

Si construimos sus correspondientes grafos encontramos que son exactamente el mismo grafo. Podemos ver nuevamente dicho grafo en la Figura 6.7. Pero no podemos demostrar en  $pr\mathcal{BPA}^\omega$  que estos procesos son iguales. Sin embargo existe un principio introducido

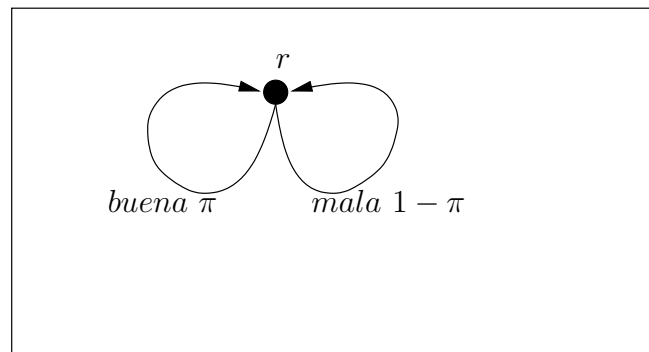


Figura 6.7: Grafo que modela el incremento poblacional de células malas

por Milner en [Mil89] llamado *Principio de especificación recursiva (RSP)* que asegura que:

*Una especificación recursiva resguardada sobre la signatura de la teoría tiene a lo sumo una solución en el modelo.*

**Teorema 2.** *RSP vale en el modelo de grafos de proceso probabilistas.*

Esquema de demostración:

Se sigue por unicidad de solución en ecuaciones recursivas con guarda. La prueba de esto es similar a la Proposición 14 del libro *Communication and Concurrency* [Mil89].

**Lema 1.** En  $pr\mathcal{BPA}^\omega$  se cumplen las siguientes igualdades:

1.  $(x^{*\pi}y)^\omega = (x^{*\pi}y).(x^{*\pi}y)^\omega$
2.  $(x +_\pi y)^\omega = (x^{*\pi}y).(x +_\pi y)^\omega$

*Prueba de 1.:*

$$(x^{*\pi}y)^\omega = (x^{*\pi}y).(x^{*\pi}y)^\omega \quad (\text{Proposición 5: 4.})$$

*Prueba de 2.:*

$$\begin{aligned} (x +_\pi y)^\omega &= (x +_\pi y)^{*1}z && (\text{prExt2}) \\ &= x +_\pi (y((x +_\pi y)^{*1}z) +_1 z) && (\text{prBKS3}) \\ &= x +_\pi (y((x +_\pi y)^{*1}z)) && (\text{Proposición 5: 1.}) \\ &= x +_\pi (y(x +_\pi y)^\omega) && (\text{prEx2}) \\ &= (x^{*\pi}y).(x +_\pi y)^\omega && (\text{prBKS2}) \end{aligned}$$

Es decir, ambos términos son soluciones de la misma ecuación recursiva:

$$X = (x^{*\pi}y).X$$

El RSP dice que si dos términos solucionan la misma ecuación resguardada entonces esos términos son iguales. Esto nos permite decir la siguiente afirmación:

**Lema 2.** En  $pr\mathcal{BPA}^\omega + RSP$  se cumple que:

$$(x^{*\pi}y)^\omega = (x +_\pi y)^\omega$$

Otra propiedad que nos permite demostrar la teoría  $pr\mathcal{BPA}^\omega + RSP$  es la que indica que aplicar el operador  $^\omega$  en forma anidada como en la expresión  $(x^\omega)^\omega$  se reduce a aplicarlo una sola vez. Esta noción se generaliza en el siguiente teorema:

**Teorema 3.** La siguiente identidad se cumple en  $pr\mathcal{BPA}^\omega + RSP$ :

$$(z +_\pi y.x^\omega)^\omega = (z^{*\pi}y).x^\omega$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned} (z +_\pi y.x^\omega)^\omega &= (z^{*\pi}(y.x^\omega))^\omega && (\text{Lema 2}) \\ &= ((z^{*\pi}y).x^\omega)^\omega && (\text{prA5}) \\ &= ((z^{*\pi}y).x^\omega).((z^{*\pi}y).x^\omega)^\omega && (\text{Proposición 5: 4.}) \\ &= (z^{*\pi}y).(x^\omega.((z^{*\pi}y).x^\omega)^\omega) && (\text{prA5}) \\ &= (z^{*\pi}y).x^\omega && (\text{Proposición 5: 5.}) \end{aligned}$$

# Capítulo 7

## Conclusión

Comenzamos este trabajo con el objetivo de construir un álgebra básica de procesos probabilistas con iteración denominada  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Es decir, con operadores capaces de modelar procesos con alternativas de ejecución, procesos secuenciales y procesos con comportamiento iterativo.

Para realizar esto estudiamos las álgebras existentes en las ciencias de la computación, que contenían los operadores que nos interesaban o parte de ellos. En nuestro repaso por estas teorías, comenzamos con el álgebra básica de procesos  $\mathcal{BPA}$ , que contiene los operadores para construir los procesos más simples; es decir, el operador de composición alternativa, el operador de composición secuencial y un conjunto de constantes o acciones atómicas. Luego estudiamos una extensión del álgebra  $\mathcal{BPA}$  que agregaba un operador de iteración sobre procesos, llamada  $\mathcal{BPA}^*$ .

Otra teoría muy útil para el desarrollo de nuestro trabajo fue el álgebra básica de procesos probabilistas  $pr\mathcal{BPA}$ , que toma los operadores del álgebra  $\mathcal{BPA}$  y les agrega probabilidades. Y observamos cómo esta teoría eliminó el no determinismo asociado al operador de elección en  $\mathcal{BPA}$ . A partir de aquí comenzamos nuestro desarrollo principal, el de construir el álgebra  $pr\mathcal{BPA}^*$  con una axiomatización consistente. Definimos un nuevo operador denominado operador de iteración probabilista y presentamos un conjunto de axiomas para este operador. Logramos esto tomando el operador de iteración presentado en  $\mathcal{BPA}^*$  y trabajando sobre sus axiomas para introducirles probabilidades. También quitamos, de esta forma, el no determinismo asociado al operador de iteración en la teoría  $\mathcal{BPA}^*$ , determinándolo con probabilidades.

Una vez obtenido el sistema de axiomas emprendimos la tarea de demostrar que este sistema era una axiomatización consistente para procesos probabilistas con iteración. Para la prueba de consistencia necesitamos definir un modelo para nuestra teoría  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Por lo que, observando los modelos existentes, elegimos trabajar con el modelo de grafos, puesto que es el más usado para modelar procesos, porque permite modelar fácil y claramente el comportamiento de un sistema. Y tomamos como relación de igualdad entre dos elementos del modelo la relación de bisimulación probabilista, ya que no sólo verifica que dos grafos puedan ejecutar la misma secuencia de acciones con igual probabilidad, sino que también tengan la misma estructura de ramificación. Una vez obtenido el modelo de grafos probabilistas pasamos a explicar la interpretación de los operadores de la signatura en elementos del modelo. Luego definimos formalmente la bisimulación probabilista y observamos que era una congruencia para los operadores del álgebra  $pr\mathcal{BPA}^*$ . Esto nos resultó muy útil, ya que con esta propiedad la demostración de consistencia se reduce a probar sólo sobre

los axiomas. Durante este camino encontramos algunas propiedades interesantes de nuestra álgebra: por ejemplo, afirmaciones que se cumplen en la teoría  $\mathcal{BPA}^*$ , pero no en la versión probabilista.

El álgebra construida hasta aquí modela procesos probabilistas con iteración pero no contempla comportamiento infinito. Este comportamiento es capturado al agregar los valores extremos al intervalo donde toman valores las medidas de probabilidad. Por lo que decidimos extender nuestro trabajo con una nueva álgebra denominada  $pr\mathcal{BPA}^\omega$ , que tomó los operadores de  $pr\mathcal{BPA}^*$  y les agregó la probabilidades extremas; e introdujimos un nuevo operador de iteración infinita al que llamamos omega. En esta álgebra realizamos nuevamente todos los pasos para poder encontrar una axiomatización consistente para los nuevos operadores. Y también encontramos en el camino propiedades interesantes: descubrimos dos procesos cuyos grafos eran iguales (bisimilares), pero cuya igualdad no podíamos derivar con los axiomas de la teoría  $pr\mathcal{BPA}^\omega$ . Trabajando en ellos encontramos que estos procesos podían escribirse como ecuaciones recursivas resguardadas y que los dos tenían la misma ecuación recursiva. Hallamos que este resultado era mencionado en el *Principio de especificación recursiva*, que nos indicaba que si dos elementos son soluciones de la misma ecuación recursiva entonces ellos son iguales. Con este resultado agregamos nuestro último aporte al trabajo.

# Bibliografía

- [BBP94] Jan A. Bergstra, Inge Bethke, and Alban Ponse. Process algebra with iteration and nesting. *Comput. J.*, 37(4):243–258, 1994.
- [BBR06] Jos C. M. Baeten, T. Basten, and M.A. Reniers. Process algebra: Equational theories of communicating processes, 2006. A publicarse.
- [BBS95] Jos C. M. Baeten, Jan A. Bergstra, and Scott A. Smolka. Axiomatizing probabilistic processes: Acp with generative probabilities. *Information and Computation*, 121(2):234–255, 1995.
- [BFP] J. Bergstra, W. Fokkink, and A. Ponse. Process algebra with recursive operations.
- [BV95] J. C. M. Baeten and C. Verhoef. *Concrete process algebra*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
- [BW90] J.C.M. Baeten and W.P. Weijland. *Process Algebra*, volume 18 of *Cambridge tracts in theoretical computer science*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Fok00] Wan Fokkink. *Introduction to Process Algebra*. Springer, 2000.
- [Kle56] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata Studies*, pages 3–41. Princeton University Press, 1956.
- [Mil89] R. Milner. *Communication and Concurrency*. Prentice-Hall, 1989.
- [Tro93] Douglas R. Troeger. Step bisimulation is pomset equivalence on a parallel language without explicit internal choice. *Mathematical Structures in Computer Science*, 3(1):25–62, 1993.
- [vGSS95] Rob J. van Glabbeek, Scott A. Smolka, and Bernhard Steffen. Reactive, generative and stratified models of probabilistic processes. *Information and Computation*, 121(1):59–80, 1995.