

Recordar que una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es *eventualmente constante* si cumple que

$$\exists c, N, \forall n, N < n \implies a_n = c.$$

- Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es eventualmente constante y esto está atestiguado por  $c$  y  $N$ . Demostrar que cualquier  $N' \geq N$  también sirve para justificarlo.
- Demostrar que si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son eventualmente constantes, entonces  $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también lo es. (¡Ojo! Los respectivos  $c$  y  $N$  pueden ser ambos distintos).
- Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión y  $\epsilon > 0$  dados. Definir formalmente: “*Los términos de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eventualmente tienen módulo menor que  $\epsilon$* ”.

Para los siguientes ejercicios, es conveniente recordar que toda sucesión es una función, y repasar las definiciones de funciones (de)crecientes (monótonas y estrictas).

- Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión.
  - Escribir, usando la notación para sucesiones, las definiciones de los cuatro tipos de (de)crecimiento que puede tener  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - Demostrar que si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente, entonces  $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente decreciente.
  - Enunciar un resultado análogo al anterior para  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Demostrar que la sucesión  $\{\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente (recordar P1E2(c)).
- Decidir si las siguientes sucesiones están acotadas inferior y/o superiormente. Justificar.
  - $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - $\{(-1)^n \cdot n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - Una sucesión eventualmente constante.

7. Demostrar que una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada si y sólo si existe  $M$  tal que  $|a_n| \leq M$ . Notar que esto aplica a funciones en general.

- Considerar la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .
  - Para  $\epsilon = 0,2$  y  $\epsilon = 0,05$ : determinar los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $a_n$  se encuentra a una distancia de al menos  $\epsilon$  de 0.
  - Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

9. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$$

10. Usar las reglas de cálculo para obtener los siguientes límites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-2n}{3n-7}. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2}. \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

11. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-100}{n} = +\infty. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty.$$

12. Calcular los siguientes límites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+7n}{n-2}. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2-4n}). \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3+1}.$$

13. Probar que para todo número real  $\ell \in (0, 1)$ , existe una sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números racionales tal que  $q_n \in (0, 1)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \ell$ .

14. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión dada por  $a_n = (-1)^n$ .

(a) Dar tres subsucesiones convergentes de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  distintas.

(b) Probar que si  $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión convergente, entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 1$  ó  $-1$ .

15. (a) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tal que  $a_n \in \mathbb{Z}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$  entonces  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es eventualmente igual a  $\ell$ .

(b) Determinar todas las subsucesiones convergentes (con su límite) de la sucesión

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

16. Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

17. (a) Demostrar que si  $0 < a < 2$  entonces  $a < \sqrt{2a} < 2$ .

(b) Demostrar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$$

(c) Hallar el límite de la sucesión del ítem anterior. (Sugerencia: notar que si  $a_n$  denota al  $n$ -ésimo término de la sucesión, entonces  $(a_{n+1})^2 = 2a_n$ ).

18. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, entonces  $\{a_{3n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  también diverge.

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ó  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

(c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , y  $b_n > 0$  para todo  $n$ , entonces  $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiende a  $+\infty$  o converge.

(d) Si  $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{a_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen, entonces  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

#### EJERCICIOS EXTRA

19. Demostrar que si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es eventualmente constante si y sólo si existe un  $N$  tal que  $\forall m, n, N < m, n \implies a_n = a_m$ .

20. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión.

(a) Definir formalmente: “Los términos de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eventualmente tienen módulo tan chico como uno quiera”.

(b) Convencerse de que esto es exactamente lo mismo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

21. Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente si y sólo si para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n < a_{n+1}$ .

22. Demostrar que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de naturales, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq a_n$ .

23. Probar que la definición de límite de sucesiones es equivalente a la que requiere que  $N$  sea un número natural. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |a_n - l| < \varepsilon.$$