Análisis Matemático I — Teórico

Pedro Sánchez Terraf*

5 de mayo de 2024

Apunte del teórico, basados en notas de Adrián Andrada, y siguiendo el libro de Spivak [3, 2].

Índice

*Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM-FaMAF). Córdoba. Argentina.

1. Introducción

La primera pregunta básica que uno puede hacerse es para qué sirve la matemática. Una respuesta tan corta como inútil es que "sirve para contar y medir". Parte de la inutilidad es que sólo refiere a los *números*, pero nos sirve puesto que en esta materia estudiaremos rigurosamente el universo numérico más importante (de los números *reales*), puesto que incluye a todos los que conocieron hasta ahora.

De estos números reales sólo tenemos ciertas *representaciones*, y la solución que existe para poder entenderlos consiste en

> Trabajar con descripciones precisas, usando reglas claras y construyendo un discurso *escrito* ordenado.

Entre las propiedades que quisiéramos que cumpla el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es que incluya a los otros conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Y queremos además que tengan las mismas **operaciones** básicas: suma, resta, producto y división.

Resulta que enfocándonos en estas operaciones aritméticas (y en el orden numérico "natural") obtendremos la descripción más sencilla posible de $\mathbb{R}$.

2. Los axiomas

2.1. Aritmética

Nuestras suposiciones de base sobre los números reales incluyen que forman un conjunto $\mathbb{R}$ que tiene dos elementos nombrados o "distinguidos" 0 y 1, y en el que podemos trabajar con ciertas ***operaciones***: suma (+), ***opuesto*** (−), producto (·) e ***inverso*** ($^{-1}$). Las operaciones de suma y producto son ***binarias***: "comen" dos elementos de $\mathbb{R}$, digamos, 6 y 3, y nos dan resultados en $\mathbb{R}$, que escribimos $6 + 3$ y $6 \cdot 3$, respectivamente.

Las dos operaciones restantes son "***unarias***", porque comen *un* número real y nos devuelven el resultado. El opuesto de 6 se escribe -6, y tiene la propiedad que aplicado dos veces, se cancela: $-(-4) = 4$.

El inverso de 2 se escribe 2^{-1}, y su valor es 0,5. Esta operación tiene una particularidad extra muy importante, puesto que no está ***definida*** para el 0. Es decir, la expresión "0^{-1}" no tiene sentido en matemática.[1] Las otras operaciones sí están definidas "sobre todo $\mathbb{R}$": si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b$, $-a$ y $a \cdot b$ siempre tienen sentido.

Aparte de las operaciones, vamos a considerar que $\mathbb{R}$ también viene equipado con una ***relación*** binaria $<$, y para la cual podemos escribir expresiones como $4 < 6$ y $1 + 0 < 1$, las cuales estarán siempre definidas, pero pueden ser verdaderas (como la primera) o falsas (como la segunda, que de hecho se lee "$(1 + 0) < 1$").

Con todos estos elementos, podemos escribir una lista de propiedades aritméticas básicas que supondremos que cumplen los números reales. Las denominaremos ***axiomas***: esta palabra significa que son un punto de partida y no buscaremos justificarlas matemáticamente, si bien uno puede dar razones intuitivas ("*informales*") de por qué consideramos que son ciertas.

P1	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R}$,	$a + (b + c) = (a + b) + c$.	**Asociativa (+)**
P2	$\forall a$,	$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 0 + a = a$.	**Neutro (+)**
P3	$\forall a$,	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$.	**Opuesto**
P4	$\forall a\, b$,	$a + b = b + a$.	**Conmutativa (+)**
P5	$\forall a\, b\, c$,	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.	**Asociativa (·)**
P6	$\forall a$,	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.	**Neutro (·)**
P7	$\forall a$,	$a \neq 0$ implica $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.	**Inverso**
P8	$\forall a\, b$,	$a \cdot b = b \cdot a$.	**Conmutativa (·)**
P9	$\forall a\, b\, c$,	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.	**Distributiva**
P10	$\forall a\, b$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ (¡sólo una!)	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía (+)**
P12(·)	$\forall a\, b\, c$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía (·)**

Tabla 1: Axiomas de cuerpo ordenado.

A partir de P2 en adelante, omitimos la declaración de que las variables "se mueven en $\mathbb{R}$". Notar además que la propiedad P3 dice de forma abreviada que valen dos igualdades: $a + (-a) = 0$

y $0 = (-a) + a$. Lo mismo ocurre con P6 y P7.

Las propiedades P1–P9 de la Tabla 1 dicen que $\mathbb{R}$, junto con elementos 0 y 1, y sus operaciones forman un ***cuerpo*** (es el nombre abreviado de todas esa propiedades en conjunto), y todas juntas son las que definen un ***cuerpo ordenado***. En general es mejor referirse a ellas por sus nombres descriptivos (que aparecen en la última columna) y no por su enumeración.

Es un hecho notorio que gran parte de las propiedades *aritméticas* de $\mathbb{R}$ se siguen de esta lista. A continuación listaremos algunas de ellas, que están probadas o bien en la Sección 11 o en el Spivak [3]. Por ejemplo se puede definir la resta usando el opuesto y la suma:

Definición 2.1 (Resta)**.** La ***resta*** de números reales se define de la siguiente manera:

$$b - a := b + (-a).$$

Lo mismo con la división:

Definición 2.2 (División)**.** La ***división*** o ***cociente*** de números reales se define de la siguiente manera:

$$b/a := b \cdot a^{-1}. \tag{2.1}$$

Otra notación que ya conocemos para la división b/a es la vertical: $\frac{b}{a}$, y en ambos casos leemos "b sobre a". Como

$$\frac{1}{a} = 1/a = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}.$$

(donde la última igualdad se da por Neutro $(\cdot)$), usaremos muy frecuentemente $\frac{1}{a}$ para referirnos al inverso de a.

Una observación importante es que b/a no está definido para cualesquiera a y b. Como su definición usa el inverso, entonces aquella expresión estará definida (va a tener sentido) cuando el lado derecho de (2.1) tenga sentido. Esto sucede exactamente cuando $a \neq 0$.

Lema 2.3.

1. (*Propiedad cancelativa de* $+$) *Si* $a + b = a + c$ *entonces* $b = c$.
2. (*Unicidad del opuesto*) *Sea* $a \in \mathbb{R}$, *y supongamos que* $n \in \mathbb{R}$ *cumple que* $a + n = 0 = n + a$. *Entonces* $n = -a$.
3. *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.
4. (*Unicidad del inverso*) *Igual que el ítem 2 pero con el producto y el inverso.*
5. *Propiedad cancelativa del producto.*
6. *Para todos* $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Lema 2.4 (Absorbente)**.** *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

Corolario 2.5. *No hay* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \cdot x = 1$. *En particular, no puede existir el inverso de* 0.

Teorema 2.6. $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ *ó* $b = 0$.

Definición 2.7. Definimos las siguientes notaciones relacionadas al orden $<$:

1. La relación de "menor o igual":

$$a \leq b \iff a < b \text{ ó } a = b. \tag{2.2}$$

2. Relaciones conversas:

$$a > b \iff b < a \tag{2.3}$$
$$a \geq b \iff b \leq a \tag{2.4}$$

Lema 2.8 (Propiedad ***cancelativa de + con*** $<$)**.** *Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \iff a + c < b + c$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) es Monotonía (+). ($\Leftarrow$) se obtiene aplicando el mismo axioma pero con $-c$. ◻

Lema 2.9 (Monotonía $(+, \leq)$)**.** *Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.*

Demostración. Basta hacer casos según $a = b$ ó $a < b$. ◻

Ejercicio 2.10. Enunciar todas las variantes del Lema 2.9 cambiando algunos (o todos) los $<$ por $\leq$, y decidir cuáles son válidas. Para las que no lo son, dar un contraejemplo.

Por ejemplo, convencerse de que la variante $a < b \implies a + c \leq b + c$ es inmediatamente cierta.

Corolario 2.11. *$a \leq b$ y $c \leq d$ implican $a + c \leq b + d$.*

Definición 2.12 (Signo)**.** Se denominan ***positivos*** a los reales a que cumplen $0 < a$, y ***negativos*** a los que cumplen $a < 0$.

El 0 no es positivo ni negativo. Por eso, no es lo mismo decir "positivo" que "no negativo" (pueden entender esto yendo al casino con la suposición que todos los números de la ruleta son rojos o negros).

Lema 2.13 (Orden y Positividad)**.** *Para todos los reales r y s, se da $r < s \iff 0 < s - r$.*

Lema 2.14 (Signo del opuesto)**.** 1. *$a < 0 \iff 0 < -a$, y análogamente con $\leq$.*

2. *$a > 0 \iff 0 > -a$, y análogamente con $\geq$.*

Lema 2.15 (Signo del inverso)**.** *Para todo $a \in \mathbb{R}$, se dan*:

1. $a > 0 \iff a^{-1} > 0$;

2. $a < 0 \iff a^{-1} < 0$.

Lema 2.16 (Signo del cuadrado)**.** *Para todo $a \in \mathbb{R}$,*

1. *$a \neq 0$ implica $a^2 > 0$.*

2. *$a^2 \geq 0$.*

Demostración. Veamos el primer ítem. Por Tricotomía, $0 < a$ ó $a < 0$.

- Si $0 < a$, podemos aplicar P12($\cdot$) a esta desigualdad con $c = a$, y obtenemos $0 \cdot a < a \cdot a$ (es decir, estamos usando "$0 < a$" dos veces). Continuamos la deducción a partir de allí:

$$\begin{aligned} \underline{0 \cdot a} < a \cdot a &\implies 0 < a \cdot a && \text{Absorbente (Lema 2.4),} \\ &\implies 0 < a^2 && \text{Definición } a^2. \end{aligned}$$

- Si $a < 0$, por Lema 2.14.1 tenemos $0 < -a$. Aplicando P12($\cdot$) con $c = -a$ tenemos $0 \cdot (-a) < (-a) \cdot (-a)$, como en el caso anterior. Continuando desde ahí,

$$\begin{aligned} \underline{0 \cdot (-a)} < (-a) \cdot (-a) &\implies 0 < (-a) \cdot (-a) && \text{Absorbente,} \\ &\implies 0 < a \cdot a && \text{Lema 2.3.6,} \\ &\implies 0 < a^2 && \text{Definición } a^2. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del Ítem 1.

Para el Ítem 2, basta considerar los casos $a \neq 0$ y $a = 0$. Si $a \neq 0$, entonces el Ítem 1 asegura que $a^2 > 0$ y *a fortiori** obtenemos $a^2 \geq 0$. Si $a = 0$,

$$a^2 = 0^2 = 0 \geq 0,$$

así que también se obtiene la tesis[2]. ⊞

Corolario 2.17. $1 > 0$ *y* $2 \neq 0$.

Notar que la segunda propiedad no involucra el orden, pero no se puede probar sin usarlo.

Lema 2.18. $a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ *ó* $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.

Ejemplo 2.19. Determinar los x tales que $(x - 1)(x - 3) > 0$.

Solución.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ó } x > 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty).$$ ⊞

2.2. Valor absoluto

Si a y b son reales, le llamemos $d(a, b)$ a su "distancia". Notar que esto *no es* una definición. Conviene pensar ejemplos muy elementales para entender cómo debería ser la definición correcta.

Ejemplo 2.20. Si $a = 5$ y $b = 8$, $d(a, b) = 3 = 8 - 5 = b - a$.

Ejercicio 2.21.

1. ¿Cuánto vale $d(b, a)$?
2. Suponga $a < 0 < b$. ¿Cuánto vale la distancia entre a y b?

La conclusión es que bastan considerar dos casos para resolver el problema.

*Esta frase latina significa "con mayor razón". Se aplica aquí porque queríamos probar $a^2 \geq 0$, que por definición es lo mismo que "$a^2 > 0$ ó $a^2 = 0$". Como hemos probado algo *más fuerte* (uno de los términos de la disyunción), seguro tiene que ser cierto el resultado.

Definición 2.22. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. La ***distancia*** de a a b, denotada por $d(a, b)$ está definida de la siguiente manera:

$$d(a, b) := \begin{cases} b - a & a \leq b \\ a - b & b < a \end{cases} \tag{2.5}$$

Ejercicio 2.23. 1. Probar que $d(b, a) = d(a, b)$.

2. Probar que $d(a, b) = 0 \iff a = b$.

Un caso sumamente especial es el cálculo de la distancia entre un real y 0. Su valor, que se puede obtener operando en (2.5), y es un nuevo concepto que describimos a continuación:

Definición 2.24. Sean $b \in \mathbb{R}$. El ***valor absoluto*** de b, denotado por $|b|$ está definido por:

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \leq b \\ -b & b < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

También se lo conoce como "***módulo*** de b".

Ejercicio 2.25. Probar que $d(a, b) = |b - a|$.

Lema 2.26 (Pr1E10)**.** (a) $|x| = |-x|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Teorema 2.27 (Desigualdad triangular)**.** $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Demostración. Dado que la definición de valor absoluto procede por casos, y como tenemos 3 valores absolutos involucrados, deberíamos analizar cada una de las $2^3 = 8$ combinaciones que aparecen abajo:

a	b	$a + b$
≥ 0	≥ 0	≥ 0
≥ 0	≥ 0	< 0
≥ 0	< 0	≥ 0
≥ 0	< 0	< 0
< 0	≥ 0	≥ 0
< 0	≥ 0	< 0
< 0	< 0	≥ 0
< 0	< 0	< 0

Pero podemos aprovecharnos de la ***simetría*** del problema con respecto a a y b: basta considerar que $a \leq b$ *sin pérdida de generalidad.*[3]

¿Por qué? Supongamos un caso donde no se da $a \leq b$, por ejemplo, $a = 3$ y $b = -2$. El enunciado que demostrar para este caso es

$$|3 + (-2)| \leq |3| + |-2|.$$

Pero aplicando la propiedad conmutativa de la suma a cada lado, esto es equivalente a

$$|(-2)+3| \leq |-2|+|3|,$$

que es el caso para $a=-2$ y $b=3$—y para éste sí vale $a \leq b$. En resumen, considerar los casos en los que $a \leq b$ termina cubriendo todas las posibilidades.

Ahora que estamos suponiendo $a \leq b$, hay varios casos de la tabla anterior que ya pueden darse. Por ejemplo, las filas tercera y cuarta son imposibles, puesto que si $a \geq 0$, entonces $b \geq 0$ por transitividad. Además, los casos segundo y penúltimo son imposibles, por monotonía de la suma. Restan entonces:

	a	b	$a+b$
A	≥ 0	≥ 0	≥ 0
B	< 0	≥ 0	≥ 0
C	< 0	≥ 0	< 0
D	< 0	< 0	< 0

Los casos A y C son inmediatos, puesto de hecho obtenemos la igualdad. Para el primero,

$$\begin{aligned} |a+b| &= a+b && \text{Def. valor absoluto, caso A,} \\ &= |a|+|b| && \text{Def. valor absoluto, caso A.} \end{aligned}$$

A fortiori, obtenemos $|a+b| \leq |a|+|b|$. Ahora, el caso D:

$$\begin{aligned} |a+b| &= -(a+b) && \text{Def. valor absoluto, caso D,} \\ &= (-a)+(-b) && \\ &= |a|+|b| && \text{Def. valor absoluto, caso D.} \end{aligned}$$

De igual modo, se concluye la tesis.

Los otros dos casos son menos triviales. Supongamos que estamos en el caso B. Luego tenemos $b \geq 0$, y por Lema sabemos que $-b \leq 0$, así que por transitividad de $\leq$ tenemos $-b \leq b$. Aplicando Monotonía de la suma, obtenemos

$$(-a)+(-b) \leq (-a)+b,$$

El lado izquierdo es igual a $-(a+b)$. Aplicando la definición de valor absoluto (usando B), obtenemos la tesis nuevamente.

El caso C queda como ejercicio, y se obtiene usando Lema 2.14.1. ⊥

Resta averiguar por qué este teorema se llama “desigualdad triangular”. Para ello, enunciamos una consecuencia inmediata:

Corolario 2.28. $|b-a| \leq |b|+|a|$. ⊥

Si escribimos el Corolario anterior usando distancias, obtenemos lo siguiente:

$$d(b,a) \leq d(b,0)+d(a,0),$$

o, equivalentemente,

$$d(a,b) \leq d(a,0)+d(0,b).$$

Ésta última desigualdad es un caso particular del siguiente

Teorema 2.29 (Desigualdad triangular, con d)**.** *Para todos* $a, b, c \in \mathbb{R}$*,* $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$*.*

Si uno interpreta este Teorema en el plano, enuncia una propiedad que deben cumplir las longitudes de los lados de un triángulo con vértices a, b y c, y de ahí surge el nombre.

Ejercicio 2.30. Probar el Teorema 2.29.

Lema 2.31. *Sea* $b \geq 0$*. Luego*

1. $|a| < b \iff -b < a < b \iff a \in (-b, b)$.
2. $|a| \leq b \iff a \in [-b, b]$.
3. $|a| \geq b \iff a \notin (-b, b)$.

Ejercicio 2.32. Demostrar que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se da $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Ejemplo 2.33. Si partimos una recta en una "parte izquierda" y una "parte derecha", ¿cómo queda donde se partió? ¿Hay dos "átomos" matemáticos en cada borde? ¿Astillas? ¿Médula ósea?

Esta pregunta se resolverá en la Sección 3.

3. Cotas

En esta sección comienza realmente la materia. Hasta ahora, sólo hemos considerado propiedades "aritméticas" de los números reales. Pero de ese modo no podremos dar una caracterización completa de ellos.

La propiedad que distingue a los números reales de los racionales y que además asegura que se corresponden con los puntos de la recta, se obtiene estudiando no sólo los elementos de $\mathbb{R}$ sino también los *subconjuntos* de $\mathbb{R}$.

Para empezar, consideremos diversos ejemplos de dichos subconjuntos.

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\right\}$.
- $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-2n, -2n + 1)$.

Para poder considerar esta diversidad de conjuntos, vamos a enfocarnos en un único aspecto de ellos: ¿cómo están distribuidos en la recta?

Aún así, es una pregunta demasiado general. Más precisamente, nos preguntaremos si estos conjuntos se "desbordan" por la izquierda o por la derecha, o si acaso a partir de algún punto x ya no hay más elementos del conjunto. Un punto así será llamado "cota" del conjunto.

Definición 3.1.

1. z es ***cota superior*** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
2. y es ***cota inferior*** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.

Si A tiene cota superior (inferior), entonces no se "desborda" por la derecha (izquierda).*

Definición 3.2.

- A está ***acotado superiormente*** si $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está ***acotado inferiormente*** si $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Definición 3.3. Si $A \neq \varnothing$ es acotado superiormente, su ***supremo***, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores.

Análogamente con "inferiormente" e ***ínfimo***, $\inf A$.

Podemos ahora enunciar el último axioma de los números reales

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Todos los axiomas en conjunto dicen que los números reales forman un cuerpo ordenado ***completo***.

Teorema 3.4 ($\mathbb{R}$ es arquimediano)**.** *$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.*

$\mathbb{Q}$ es cuerpo ordenado arquimediano, pero no es completo (Corolario 3.20).

Corolario 3.5. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Demostración. Notemos primero que como $0 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el Lema 2.15.1 implica que $0 < \frac{1}{n}$. Ahora, en busca de una contradicción, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \leq \frac{1}{n} &\iff n \cdot \varepsilon \leq n \cdot \frac{1}{n} && \text{por Monotonía } (\cdot) \\
&\iff n \cdot \varepsilon \leq 1 && \text{por Inverso} \\
&\iff n \cdot \underline{\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}} \leq 1 \cdot \varepsilon^{-1} && \text{por Monotonía } (\cdot) \text{ y Lema 2.15.1 para } \varepsilon \\
&\iff n \cdot 1 \leq 1 \cdot \varepsilon^{-1} && \text{por Inverso} \\
&\iff n \leq \varepsilon^{-1} && \text{por Neutro } \cdot
\end{aligned}
$$

Como esta conclusión vale para todo $n \in \mathbb{N}$, ε^{-1} sería cota superior de $\mathbb{N}$, lo que contradice la arquimedianidad de $\mathbb{R}$: absurdo. ∎

Corolario 3.6. *$\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente ni superiormente.*

*Aquí estamos aplicando una práctica usual en textos de matemática, que es ahorrar espacio y escribir dos oraciones al mismo tiempo. La primera, se lee ignorando por completo los paréntesis: *Si A tiene cota* **superior***, entonces no se "desborda" por la* **derecha**. Y la segunda, ignorando lo previo a los paréntesis y leyendo lo que está en ellos: *Si A tiene cota* **inferior***, entonces no se "desborda" por la* **izquierda**.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $y \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de $\mathbb{Z}$. Tendríamos entonces que

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ y \leq m. \tag{3.1}$$

Veamos entonces que $-y$ es una cota de $\mathbb{N}$, contradiciendo la arquimedianidad de $\mathbb{R}$ (Teorema 3.4).

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $-n \in \mathbb{Z}$. Tomando $m := -n$ en (3.1), concluimos que $y \leq -n$, pero esto equivale a $n \leq -y$. Como n era arbitrario, $-y$ resulta cota superior de $\mathbb{N}$, absurdo.

Que $\mathbb{Z}$ no es acotado superiormente, queda como ejercicio. ⊞

Ahora podemos responder la pregunta dejada en el Ejemplo 2.33:

Teorema 3.7. *Toda partición $\mathbb{R} = I \cup D$ tal que $\forall r \in I,\ s \in D,\ r < s$ está determinada por un punto $a \in \mathbb{R}$, de manera que se da exactamente una de las siguientes*:

- $I = (-\infty, a)$ *y* $D = [a, \infty)$, *o bien.*
- $I = (-\infty, a]$ *y* $D = (a, \infty)$.

A continuación, demostraremos caracterizaciones muy útiles de sup e ínf. Para ello necesitaremos las propiedades del "promedio" de dos números reales.

Definición 3.8. La ***media aritmética*** entre r y s es el número $\dfrac{r+s}{2}$.

Lema 3.9. 1. $\dfrac{r+s}{2} = r + \dfrac{s-r}{2} = s - \dfrac{s-r}{2}$.

2. *Si $r < s$, entonces $r < \dfrac{r+s}{2} < s$.*

Demostración. El primer ítem queda a cargo de ustedes; veremos el segundo a continuación. Supongamos que $r < s$; por la relación entre orden y positividad (Lema 2.13), tenemos $0 < s - r$ y multiplicando por 2^{-1}, tenemos

$$0 < \frac{s-r}{2}. \tag{3.2}$$

Sumando r a ambos lados, obtenemos:

$$r < r + \frac{s-r}{2} = \frac{r+s}{2},$$

y sumando ahora s a ambos lados de (3.2),

$$s < s + \frac{s-r}{2}.$$

Podemos sumar $-\dfrac{s-r}{2}$ a ambos lados y obtenemos

$$s - \frac{s-r}{2} < s,$$

y el lado izquierdo es nuevamente $\dfrac{r+s}{2}$. ⊞

Lema 3.10 (Útil, para sup)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Son equivalentes*:

1. $s = \sup A$.

2. *s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A,\ t \leq a$.* ⊞

Demostración. (1⇒2) Sabemos que s es cota superior por definición de supremo. Supongamos ahora que $t < s$. Luego t no es cota, y entonces debe existir $a \in A$ tal que $a \nleq t$, i.e. $t < a$ por Tricotomía. Concluimos $t \leq a$.

(2⇒1) Por hipótesis, s es cota superior de A. Para ver que es la menor, supongamos que $r < s$, y veremos que no puede ser cota superior de A.

Por el Lema 3.9, $r < \frac{r+s}{2} < s$. Por hipótesis, para $t = \frac{r+s}{2}$, debe existir un $a \in A$ tal que $t \leq a$. Entonces tenemos

$$r < t \leq a,$$

lo que implica $r < a$ y esto último equivale a $a \nleq r$. Luego r no puede ser cota superior de A. ⊞

Corolario 3.11. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Son equivalentes*:

1. $s = \sup A$.

2. *s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon \leq a$.* ⊞

Demostración. Basta observar que $r < s$ equivale a $\exists \varepsilon > 0, r = s - \varepsilon$ (por Lema 2.13). ⊞

Estos mismos resultados se pueden enunciar para el ínfimo, y las pruebas son completamente análogas.

Lema 3.12 (Útil, para ínf)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Son equivalentes*:

1. $x = \text{ínf}\, A$.

2. *x es cota inferior de A y $\forall r > x, \exists a \in A,\ r \geq a$.* ⊞

Corolario 3.13. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Son equivalentes*:

1. $x = \text{ínf}\, A$.

2. *x es cota inferior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ x + \varepsilon \geq a$.* ⊞

Ejemplo 3.14. Sea $A = (0, 1)$. Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\text{ínf}\, A$, y si existe $\text{mín}\, A$ y/o $\text{máx}\, A$.

Solución. Por definición de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \wedge x < 1\}$, 1 es cota superior de A. Probemos que $1 = \sup A$ usando el Lema Útil para sup: basta para ello ver que

$$\forall r < 1, \exists a \in (0, 1),\ r \leq a.$$

Supongamos entonces que $r < 1$. Dividamos en dos casos: $r \leq 0$ y $r > 0$.

$\boxed{\text{Caso } r \leq 0.}$ En este caso, podemos tomar $a := \frac{1}{2} \in A$ y cumple que $r \leq 0 < a$ y luego $r \leq a$.

$\boxed{\text{Caso } r > 0.}$ En este caso, y usando que $r < 1$ por hipótesis, tenemos que $r \in (0, 1)$. Entonces podemos tomar $a := r$ e inmediatamente tenemos $r \leq a$. Hemos demostrado entonces que $\sup A = 1$.

Finalmente, como $\sup A \notin A$, entonces concluimos que no existe $\text{máx}\, A$.

El resto es totalmente análogo. ⊞

Ejemplo 3.15. Hacer un análisis similar al del Ejemplo 3.14 para el conjunto $A := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Solución. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se da $1 \leq n$, así que concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} \leq 1$. Entonces 1 es cota superior de A. Además, $1 \in A$, así que es el máximo de A y luego su supremo.

Por otro lado, como para $n \in \mathbb{N}$ vale $0 < n$, obtenemos $0 < \frac{1}{n}$ por signo del inverso (Lema 2.15). Luego 0 es cota inferior de A. Probemos que 0 es el ínfimo usando el Lema Útil. Basta entonces ver que $\forall r > 0, \exists a \in A,\ r \geq a$. Equivalentemente, basta ver que $\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N},\ r \geq \frac{1}{n}$, que es exactamente el Corolario 3.5 a la arquimedianidad de $\mathbb{R}$.

Como $0 = \inf A \notin A$, entonces deducimos que A no tiene mínimo. ⊥

3.1. Raíces cuadradas*

La existencia de raíces se sigue de un teorema muchísimo más general, que probaremos más adelante. De todos modos, daremos un esquema de cómo demostrar la existencia de raíces cuadradas.

Comenzamos con un ejercicio.

Ejercicio 3.16. Para todos $a, s, h \in \mathbb{R}$ se dan:

1. $a < (a+1)^2$.
2. $(s-h)^2 \geq s^2 - 2sh$.
3. $0 < h < 1$ implica $(s+h)^2 \leq s^2 + (2s+1)h$.

Teorema 3.17. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, existe un único $s \geq 0$ tal que $s^2 = a$.*

Demostración. Si $a = 0$, podemos tomar $s = 0$. Supongamos entonces que $a > 0$. Consideremos el conjunto

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^2 < a\} \tag{3.3}$$

Notemos que

(*) Si $y \geq 0$ y $y^2 > a$, entonces y es cota superior de A.

Luego por el Ejercicio 3.16.1, A está acotado por $a + 1$. Además es no vacío (puesto que $0 \in A$), así que existe $s = \sup A \geq 0$ (por la misma razón, y ser cota).

Por Tricotomía, $s^2 < a \vee s^2 > a \vee s^2 = a$. Eliminaremos las dos primeras posibilidades por el absurdo. La clave se basa en considerar valores cercanos a s.

$\boxed{\text{Caso } s^2 < a.}$ Si $h \in (0,1)$, tenemos

$$\begin{aligned}(s+h)^2 &\leq s^2 + (2s+1)h && \text{por Ejercicio 3.16.3,}\\ &= s^2 + (2s+1)h < a,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale si h es suficientemente chico: basta que $(2s+1)h < a - s^2$, es decir, que $0 < h < \dfrac{a - s^2}{2s+1}$.

Entonces, para tales h, $s + h \in A$. Pero $s < s + h$, lo que contradice el hecho de que s era cota: un absurdo.

$\boxed{\text{Caso } s^2 > a.}$ Habiendo eliminado $s^2 < a$, concluimos que $s > 0$. Si suponemos ahora que $s^2 > a$, tenemos

$$\begin{aligned} (s-h)^2 &\geq s^2 - 2sh && \text{por Ejercicio 3.16.2,} \\ &= s^2 - 2sh > a, \end{aligned}$$

donde lo último vale si h es suficientemente chico $\left(\text{basta que } h < \frac{s^2-a}{2s}\right)$.

En conclusión, $s - h$ es cota de A por (*). Esto contradice el hecho de que s sea la menor cota: otro absurdo.

Luego, la posibilidad restante es que $s^2 = a$. Usando desigualdades, se puede demostrar que no hay otro s no negativo cuyo cuadrado sea a. ◻

Definición 3.18. Sea $a \geq 0$. La ***raíz cuadrada positiva*** de a, denotada por $\sqrt{a}$, es el único s no negativo cuyo cuadrado es a, y cuando $a \neq 0$ coincide con supremo del conjunto (3.3). La expresión $\sqrt{b}$ no está definida para $b < 0$.

En general, cualquier s que cumpla $s^2 = a$ es denominado "una raíz cuadrada de a", pero el símbolo radical $\sqrt{}$ se usa sólo para los valores no negativos. Por ejemplo, $(-2)^2 = 4$ y luego -2 es una raíz cuadrada de 4, pero $\sqrt{4} \neq -2$.

Los teoremas más generales a los que nos referimos al principio involucran el comportamiento de funciones "alrededor de un punto", como hicimos en el Teorema 3.17, que supusimos algo sobre s y luego estudiamos qué sucedía para los valores $s \pm h$ con h suficientemente cercano a 0.

Como aplicación, veremos que los racionales no cumplen con el Axioma del Supremo. Primero, necesitaremos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.19. *$\sqrt{2}$ no es racional; más precisamente, no hay ningún racional s tal que $s^2 = 2$.* ◻

Corolario 3.20. *$\mathbb{Q}$ no es completo. Es decir, $\mathbb{Q}$ no satisface $P13$.*

Demostración. Notemos primero que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado, así que cumple con los axiomas P1–P12. Si fuera completo, cumpliría todos los axiomas que hemos estado utilizando hasta ahora, así que el Teorema 3.17 valdría para $\mathbb{Q}$ (porque en su prueba sólo usamos los axiomas de cuerpo ordenado completo). Pero entonces debería existir $s \in \mathbb{Q}$ tal que su cuadrado sea 2, lo que contradice el Teorema 3.19. ◻

4. Conjuntos densos

Otro aspecto de cómo puede estar distribuido un conjunto de reales tiene que ver con cuán "apretados" están sus elementos. Los elementos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ están separados entre sí, mientras que los de $\mathbb{Q}$ están muy juntos. Los primeros conjuntos se denominan *discretos*[4] mientras que decimos que $\mathbb{Q}$ es *denso*.

Definición 4.1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es ***denso*** (en $\mathbb{R}$) si para todos los $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ entonces existe $a \in A$ tal que $x < a < y$.

A continuación demostraremos que $\mathbb{Q}$ es denso, pero para ello consideraremos la operación de "redondeo a un entero" más usada en matemática. Para poder definirla, primero recordemos la siguiente propiedad de los números naturales, cuya prueba se ve en Álgebra I:

Teorema 4.2 (Principio de Buen Orden)**.** *Todo subconjunto no vacío de* $\mathbb{N}$ *tiene elemento mínimo.*

Lema 4.3. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *existe un único* $N \in \mathbb{Z}$ *que satisface*

$$N \leq x < N + 1. \tag{4.1}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{Z}$ no es acotado inferiormente, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x$. Luego tenemos que $0 < x - n$ y sumando 1, obtenemos

$$1 < x - n + 1 \tag{4.2}$$

por Monotonía.

Ahora, por arquimedianidad de $\mathbb{R}$ (Teorema 3.4), el conjunto

$$A := \{m \in \mathbb{N} \mid x - n + 1 < m\}$$

es no vacío. Usando el Principio de Buena Ordenación, tomemos su mínimo M. Como este último está en A y por (4.2), tenemos $1 < x - n + 1 < M$. Además, $M - 1 \in \mathbb{N}$ (pues $1 < M$) y al ser M mínimo, $M - 1$ no está en A, por lo que tenemos $x - n + 1 \nless M$. En resumen tenemos

$$M - 1 \leq x - n + 1 < M.$$

Sumando $n - 1$ en todos lados y operando, esto equivale a

$$\underline{M + n - 2} \leq x < \underline{M + n - 2} + 1.$$

Entonces podemos tomar $N := M + n - 2$, que pertenece a $\mathbb{Z}$.

La unicidad se sigue del hecho que para todos $N, N' \in \mathbb{Z}$, $N < N' + 1$ es equivalente a $N \leq N'$ y queda como ejercicio. ⊞

Ejercicio 4.4. Sea $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que $N \in \mathbb{Z}$ satisface (4.1). Entonces N es el mayor entero que es menor o igual a x

Luego, la noción de redondeo a la que nos referíamos arriba se puede definir de la siguiente manera:

Definición 4.5. La ***parte entera*** (o ***piso***) del número real x es

$$\lfloor x \rfloor := \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}. \tag{4.3}$$

Ahora sí tenemos todos los elementos necesarios para demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso.

Teorema 4.6 (Densidad de los racionales)**.** $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Por la Definición 4.1 de densidad, basta suponer que $x < y$ en $\mathbb{R}$ y luego encontrar enteros N y D tales que $x < \frac{N}{D} < y$.

Por hipótesis, $0 < y - x$. Luego $\exists D \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{D} < y - x$ por el Corolario 3.5 a la arquimedianidad. Multiplicando por D tenemos:

$$0 < 1 < D(y - x) = Dy - Dx,$$

y sumando Dx en todos lados,

$$Dx < Dx + 1 < Dy. \tag{4.4}$$

Consideremos ahora $\lfloor Dx \rfloor$. Ésta cumple con

$$\begin{aligned} \lfloor Dx \rfloor \leq Dx &< \lfloor Dx \rfloor + 1, && \text{luego} \\ Dx &< \lfloor Dx \rfloor + 1 \leq Dx + 1 && \text{y usando (4.4),} \\ Dx &< \lfloor Dx \rfloor + 1 \leq Dx + 1 < Dy \end{aligned}$$

Entonces, aplicando transitividad, tenemos

$$Dx < \lfloor Dx \rfloor + 1 < Dy.$$

Sea $N := \lfloor Dx \rfloor + 1$. Entonces tenemos $Dx < N < Dy$, y dividiendo por D, obtenemos lo que deseábamos:

$$x < \frac{N}{D} < y.$$ ⊞

También se puede probar que los irracionales forman un conjunto denso. Primero necesitaremos recordar que las operaciones fundamentales $+, -, \cdot$ y $(\_)^{-1}$ (y por ende también la resta y la división) mandan racionales en racionales, y probar el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.7. *Para todos los $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $r < j < s$.*

Demostración. Tomemos h un irracional en el intervalo $(0, 1)$; por ejemplo, se puede tomar $\sqrt{2}/2$ que debe ser irracional puesto que $2 \cdot \sqrt{2}/2$ lo es por el Teorema 3.19. Luego, $j := r + (s - r)h$ sirve. Es irracional, puesto que si acaso fuera racional, $h = \frac{j-r}{s-r}$ lo sería también por la observación previa a este lema. Notemos que

$$r < r + (s - r)h = j$$

puesto que $0 < (s-r)h$ al ser estos dos factores positivos. Además, como $h < 1$, $(s-r)h < (s-r)$ y luego

$$j = r + (s - r)h < r + (s - r) = s,$$

Así que hemos probado las dos desigualdades. ⊞

Teorema 4.8 (Densidad de los irracionales)**.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Usaremos la densidad de $\mathbb{Q}$ dos veces para probar el resultado. Supongamos $x < y$ en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Además, como r también está en $\mathbb{R}$ y cumple $r < y$, por densidad de $\mathbb{Q}$ nuevamente existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < y$. Por el Lema 4.7, existe un irracional j que cumple $r < j < s$. Por transitividad, concluimos que $x < j < y$. ⊞

5. Funciones

Consideraremos la definición de función que vieron durante el cursillo [1, Seccion 4.1], con dos importantes diferencias. La primera, es que dos concentraremos en el estudio de funciones que salen de y llegan a los reales. La segunda, mucho más fundamental aún, es que las funciones que consideraremos en esta materia muchas veces serán ***parciales***: no estarán definidas para todos los reales. Vimos que esto sucede con la operación de inverso, que no está definida en el 0.

Para especificar una función f hay que dar tres elementos:

- su conjunto de ***salida*** X;
- su conjunto de ***llegada*** Z;
- la ***regla de asociación***, que nos dice cómo hace corresponder los elementos de X con los de Z.

La regla de asociación vendrá dada en la mayoría de los casos por una expresión $f(x)$ que involucrará la variable x, y quizá otras más que en ese caso se les llamará ***parámetros***. En dicha expresión $f(x)$, al elemento x del conjunto de salida lo llamamos el ***argumento***, mientras que el "resultado" $f(x)$ (que pertenece al conjunto de llegada) se denomina el ***valor de*** f ***en*** x. Cuando tenemos una función y calculamos su resultado para un x, decimos que $f(x)$ es el resultado de ***evaluar*** f ***en*** el argumento x (o también ***aplicar*** f ***a*** x).

En la inmensa mayoría de los casos (y en particular, si no se dice nada al respecto) tanto el conjunto de salida como el de llegada serán iguales a $\mathbb{R}$, si bien esto no quiere decir que la función esté definida en todos los elementos del conjunto de salida ni que todos los elementos del conjunto de llegada sean valores de la función. Si la función está definida en todos los elementos del conjunto de salida X, escribiremos $f : X \to Z$ para decir eso e indicar el conjunto de llegada.*

Ejemplo 5.1. Sea $a \in \mathbb{R}$. Podemos entonces definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla $f(x) := x + a$. La variable a es un parámetro de su definición. Si a fuera 5, entonces f le asignaría 12 al 7 y 3 al -2.

5.1. Ejemplos de funciones

Ejemplo 5.2 (Función constante)**.** Las funciones más aburridas del mundo son las ***constantes***. Dado un $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$C(x) := c.$$

Es decir, sin importar qué argumento le demos, su valor es siempre c.

Ejemplo 5.3 (Función identidad)**.** En el segundo puesto de las funciones aburridas, tenemos a la función ***identidad***, I, dada por la fórmula

$$I(x) := x.$$

Es decir, a cada x le asocia él mismo.

*Puede ocurrir que la regla de asociación para $f(x)$ esté definida para algunos x *fuera* del conjunto de salida X, pero en ese caso simplemente se ignoran.

Como ya insistimos, es posible que la regla de asociación no esté definida para todos los elementos del conjunto de salida.* Para los que sí está definida son exactamente los elementos de su *dominio*.

Definición 5.4. El ***dominio*** de una función f viene dado por la siguiente equivalencia:

$$x \in \operatorname{Dom} f \iff f(x) \text{ está definido.} \tag{5.1}$$

Equivalentemente, podemos decir que $x \in \operatorname{Dom} f$ si y sólo si $f(x)$ tiene sentido, y también

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido}\} \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.5. Consideremos la función H dada por el inverso, $H(x) := x^{-1}$. Como ya vimos, la expresión que la define tiene sentido exactamente cuando $x \neq 0$, con lo que concluimos que $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 5.6 (Raíz cuadrada positiva)**.** La función S dada por $S(x) := \sqrt{x}$ está definida exactamente para los x no negativos (Definición 3.18). De modo que $\operatorname{Dom} S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$.

Definición 5.7. La ***imagen*** de f, $\operatorname{Im} f$, viene dada por la siguiente equivalencia:

$$z \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ f(x) = z. \tag{5.3}$$

Notemos que para que un z esté en la imagen, la expresión del lado derecho debe ser verdadera, así que en particular tiene que estar definida. Para eso se necesita que haya un x tal que $f(x)$ tenga sentido (para ser igual a z). Por esta razón, tenemos la siguiente caracterización:

Lema 5.8. *Para toda función,* $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$.

Ejemplo 5.9. Sea la función $M(x) = |x|$. Entonces $z \in \operatorname{Im} M \iff z \geq 0$ (es decir, $\operatorname{Im} M = [0, \infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}$)

5.2. Aritmética de funciones

Así como podemos operar con números reales, mostraremos cómo se pueden usar operaciones aritméticas con las funciones.

Definición 5.10. Sean f y g funciones. La ***suma*** de f y g, denotada por $f + g$ (¡no diga!) está dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x). \tag{5.4}$$

Los paréntesis alrededor de $f + g$ se utilizan para que no se confunda con otra expresión ("$f + g(x)$" podría leerse como sumar "el número f" a $g(x)$).

Calculemos entonces para cuáles x tiene sentido $(f + g)(x)$ (es decir, cuáles están en su dominio).

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Dom}(f+g) &\iff f(x) + g(x) \text{ definido} && \text{Def. de Dom,}\\
&\iff f(x) \text{ definido} \wedge g(x) \text{ definido,} &&\\
&\iff x \in \operatorname{Dom} f \wedge x \in \operatorname{Dom} g && \text{Def. de Dom,}\\
&\iff x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g. && \text{Def. de intersección}
\end{aligned}$$

*Esto incluye el caso de que la regla de asociación dé un valor que no se halle en el conjunto de salida.

Del mismo modo, se puede definir el ***producto*** $f \cdot g$ y el ***cociente*** f/g de funciones:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \tag{5.5}$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \tag{5.6}$$

Lema 5.11. 1. $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.

2. $\mathrm{Dom}(f/g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Demostración. Para la suma está hecho más arriba, y para el producto es exactamente igual. Para el cociente, aprovechamos lo que ya hicimos:

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(f/g) &\iff f(x)/g(x) \text{ definido} && \text{Def. de Dom,}\\
&\iff \underline{f(x) \text{ definido} \wedge g(x) \text{ definido}} \wedge g(x) \neq 0 && \text{Def. de cociente,}\\
&\iff \big(x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g\big) \wedge g(x) \neq 0 && \text{Def. de intersección}\\
&\iff x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

⊞

Ahora definiremos una operación entre funciones muy diferente, porque verdaderamente usa el hecho que son funciones (y no es que se fija únicamente en los valores).

Definición 5.12. La ***composición*** de f con g, denotada por $f \circ g$, viene dada por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \tag{5.7}$$

Tenemos entonces:

Lema 5.13. *Supongamos que f y g son funciones. Entonces para todo x, $x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) \iff x \in \mathrm{Dom}\, g \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}\, f$. Equivalentemente,*

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}\, g \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}\, f\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) &\iff f(g(x)) \text{ definido} && \text{Def. de Dom,}\\
&\iff \underline{g(x) \text{ definido}} \wedge f \text{ definido en } g(x)\\
&\iff \big(x \in \mathrm{Dom}\, g\big) \wedge \big(g(x) \in \mathrm{Dom}\, f\big).
\end{aligned}$$

⊞

Ejemplo 5.14. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\big(\tfrac{1}{x-1}\big) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2 - 2 \cdot x + 1},$$

y por otro lado,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\big(x^2\big) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Al evaluar en 0, obtenemos valores distintos. Luego son funciones distintas.

Concluimos entonces que la operación de composición de funciones *no es conmutativa*.

Ejemplo 5.15. Consideremos la función $H(x) = \frac{1}{x}$. ¿Qué función es $H \circ H$?

Solución. Si operamos usando la definición de $\circ$ (5.7), tenemos

$$(H \circ H)(x) = H(H(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = (x^{-1})^{-1} \overset{*}{=} x = I(x),$$

con lo que parece que obtuvimos que $H \circ H = I$. Pero esto no es cierto, y el problema está en la igualdad marcada con $*$, puesto que la expresión "x" del lado derecho está definida (obviamente) para todo $x \in \mathbb{R}$, mientras "$(x^{-1})^{-1}$" sólo lo está si $x \neq 0$, así que no son iguales como funciones (puesto que $\operatorname{Dom} I = \mathbb{R}$, mientras que $\operatorname{Dom} H \circ H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$). ⊞

Ejercicio 5.16. Probar que la composición es asociativa: para todas las funciones f, g, h se da $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Para definir la última operación de funciones, es necesario un concepto extra.

Definición 5.17. Una función f se dice ***inyectiva*** o ***uno a uno*** (escrito "***1-1***") si para todos los x, y en $\operatorname{Dom} f$, se da

$$f(x) = f(y) \implies x = y. \tag{5.8}$$

Definición 5.18. Sea f una función inyectiva. La ***inversa*** de f, denotada por f^{-1}, viene dada por:

$$f^{-1}(z) \;:=\; \text{el único } x \text{ tal que } f(x) = z. \tag{5.9}$$

Como antes, no siempre está definido el lado derecho de (5.9). Estudiemos cuándo lo está.

Lema 5.19. *Sea f inyectiva. El dominio de la inversa de f coincide con su imagen*: $z \in \operatorname{Dom} f^{-1} \iff z \in \operatorname{Im} f$.

Demostración. Como f es inyectiva, *hay a lo sumo* un x tal que $f(x) = z$. Pero podría no haber ningún x así. Justo para los z tales que existe un x que cumple $f(x) = z$ son los elementos de $\operatorname{Im} f$ (Definición 5.7). ⊞

Teorema 5.20. *Sea f una función inyectiva. Entonces*:

1. *Si $z \in \operatorname{Im} f$, entonces $f(f^{-1}(z)) = z$.*
2. *Si $y \in \operatorname{Dom} f$, entonces $f^{-1}(f(y)) = y$.*

Demostración. Para el primer ítem, si $z \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Dom} f^{-1}$ entonces la expresión (5.9) tiene sentido. En particular $f^{-1}(z)$ es un x que cumple $f(x) = z$. Reemplazando x se obtiene el resultado.

Para el segundo ítem, si $y \in \operatorname{Dom} f$ entonces $f(y)$ está definido. Más aún, y cumple (trivialmente) que $z = f(y)$, donde $z := f(y)$. Además, como dijimos arriba, al ser f inyectiva no puede haber otro y así. De manera que y es el único x tal que $f(x) = f(y)$. Por lo tanto $y = f^{-1}(f(y))$, por definición (5.9). ⊞

5.3. Funciones (de)crecientes

Definición 5.21. Una función f es ***acotada superiormente*** (***inferiormente***) si $\operatorname{Im} f$ lo es.
La función f es ***acotada*** (a secas) si lo es superior e inferiormente.

Es decir, f es acotada superiormente (inferiormente) si y sólo si el conjunto $\{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$ es acotado superiormente (inferiormente).

Lema 5.22. *Una función f es acotada si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que $\forall x,\ |f(x)| \leq M$.* ⊞

Definición 5.23. 1. Diremos que la función f es ***estrictamente creciente*** (***decreciente***) si se cumple que para todos los $x, y \in \operatorname{Dom} f$,

$$x < y \implies f(x) < f(y) \quad \text{(resp., } f(x) > f(y)\text{)}. \tag{5.10}$$

2. Diremos que f es ***monótona creciente*** (***decreciente***) si la conclusión anterior vale con la desigualdad laxa:

$$x < y \implies f(x) \leq f(y) \quad \text{(resp., } f(x) \geq f(y)\text{)}. \tag{5.11}$$

3. Finalmente, diremos que f es ***monótona*** si es monótona creciente o monótona decreciente.

Ejercicio 5.24. 1. La suma de funciones monótonas (de)crecientes es monótona (de)creciente.

2. La suma de una función estrictamente (de)creciente con una monótona (de)creciente es estrictamente (de)creciente.

Ejercicio 5.25. Supongamos que $c > 0$ ($c < 0$)

1. Si f es estrictamente creciente entonces es $c \cdot f$ es estrictamente (de)creciente.
2. Si f es estrictamente decreciente entonces es $c \cdot f$ es estrictamente decreciente (creciente).

Un resultado análogo vale con funciones monótonas (y se permite las igualdades laxas $c \geq 0$ y $c \leq 0$, respectivamente).

6. Sucesiones

Definición 6.1. Una ***sucesión*** (numérica infinita) es una función con dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

En general, una sucesión es cualquier función $a : \mathbb{N} \to Z$ donde Z es un conjunto arbitrario.
Para referirnos al valor $a(n)$ de una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ utilizaremos la notación a_n, y entonces se utilizan también las siguientes notaciones para referirse a la sucesión completa a:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{a_n\}_n, \qquad (a_n \mid n \in \mathbb{N}), \qquad \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle, \qquad \ldots$$

Definición 6.2. Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que l es el ***límite*** de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o que es el "límite de a_n cuando n tiende a infinito" si se da la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |a_n - l| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Recordando la caracterización de distancia dada por el Ejercicio 2.25, la fórmula (6.1) de la definición de límite nos dice que para n suficientemente grandes, la distancia entre a_n y l se achica tanto como queramos:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ d(a_n, l) < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Si l es el límite de a_n cuando n tiende a ∞, escribiremos

$$\operatorname*{lím}_{n\nearrow\infty} a_n = l.$$

Es importante notar que la "igualdad" es **parte de la notación** en este punto: $\operatorname{lím}_{n\nearrow\infty}$ es una relación entre sucesiones y números reales. De hecho, a veces escribimos "a_n tiende a l" como

$$a_n \xrightarrow[n\nearrow\infty]{} l \quad \text{o simplemente} \quad a_n \xrightarrow[n]{} l.$$

Más adelante probaremos que efectivamente $\operatorname{lím}_{n\nearrow\infty}$ se comporta como una función (parcial, de sucesiones a reales), más aún "lineal" (en cierto sentido preciso pero no exactamente lo mismo que la definición que Uds ya conocen).

Definición 6.3. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{lím}_{n\nearrow\infty} a_n = l$, diremos que a es ***convergente***. Si no existe un l así, diremos que la sucesión es ***divergente***.*

6.1. Límites y juegos

La definición de límite tiene tres cuantificadores "alternados": "para todo", "existe", "para todo". Eso ya roza lo máximo que uno puede manejar en la cabeza, así que es conveniente tener un método para poder demostrar y refutar afirmaciones del tipo "l es el límite de a_n", o bien "no existe el límite de a_n". Para ello introduciremos un juego.

En este juego participan dos jugadores, ∃loísa y ∀belardo, que van haciendo jugadas alternativamente. El objetivo de ∃loísa es demostrar un enunciado y ∀belardo juega en contra de ese propósito. Por este motivo, nosotras/os estaremos del lado de ∃loísa, y ∀belardo será nuestro adversario.

∀belardo tiene una movida cada vez que hay un cuantificador universal (un "para todo") y ∃loísa juega cuando hay un cuantificador existencial. Las jugadas consisten en los valores de las variables respectivas, y para que sean legales, deben cumplir con los requisitos que estén escritos sobre dichas variables. Una vez hechas todas las movidas, queda escrita una propiedad que puede ser **V** ó **F**. En el primer caso, gana la partida ∃loísa (o sea, ganamos), y en caso contrario gana ∀belardo (es decir, perdimos).

Para *demostrar* el enunciado en cuestión, debemos dar una ***estrategia ganadora*** para ∃loísa; esto es, una manera de asegurar que ∀belardo no podrá ganar, sin importar cuáles sean sus jugadas.

Para el caso en el que queramos demostrar (6.1), el juego procederá así (donde empieza ∀belardo puesto que el primer cuantificador es universal):

*Desgraciadamente, este término también se presta a confusión: que una serie "diverja" **no** significa que sus términos se hagan cada vez más grandes (en valor absoluto); sólo quiere decir que "no converge". Un ejemplo claro de esto está dado más abajo por el Teorema 6.6.

1. ∀belardo juega un ε. Para que la movida sea legal, debe darse $\varepsilon > 0$:

$$\underline{\forall\varepsilon > 0},\ \exists N,\ \forall n > N,\ |a_n - l| < \varepsilon.$$

2. ∃loísa juega un N. No hay restricciones sobre su valor, pero seguramente ∃loísa deberá elegirlo teniendo en cuenta qué "movió" antes ∀belardo:

$$\underline{\exists N},\ \forall n > N,\ |a_n - l| < \varepsilon.$$

3. ∀belardo juega un n. Para que la movida sea legal, debe ser un entero positivo (sino a_n no estaría definido) y mayor que N (en este sentido, ∃loísa restringe qué puede mover ∀belardo):

$$\underline{\forall n > N},\ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Finalmente nos queda la expresión

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Si es verdadera para los valores elegidos, ganamos. Sino, gana ∀belardo y estamos fritos.

Hagamos un ejemplo concreto con la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Supongamos que jugamos contra ∀belardo usando el enunciado "$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0{,}1$". Es decir, jugaremos a

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \left|\frac{1}{n} - 0{,}1\right| < \varepsilon.$$

Entonces, una partida posible es la siguiente:

1. ∀belardo juega $\varepsilon = 0{,}5$ (es legal). Obtenemos:

$$\exists N,\ \forall n > N,\ \left|\frac{1}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}5.$$

2. ∃loísa juega $N = 3$:

$$\forall n > 3,\ \left|\frac{1}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}5.$$

3. ∀belardo juega $n = 4$, que es un natural mayor a 3. Queda el enunciado:

$$\left|\frac{1}{4} - 0{,}1\right| < 0{,}5. \tag{6.3}$$

El enunciado (6.3) es verdadero, así que ganó ∃loísa. Pero fue pura suerte, o dicho de otro modo, ∀belardo jugó pésimo. De hecho, si jugara bien, perderíamos siempre porque el enunciado del que partimos es falso. A continuación escribimos el enunciado correcto.

Ejemplo 6.4. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solución. El enunciado en cuestión es

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

y como $\frac{1}{n} > 0$, es lo mismo que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

Recordemos que para demostrar la afirmación, debemos dar una *estrategia* para ∃loísa; no basta ganar una sola partida.

1. No tenemos idea de qué moverá ∀belardo en su primera jugada, así que simplemente le llamaremos ε. Lo que sí sabemos es que debe ser una movida legal, así que sabemos que $\varepsilon > 0$.

2. Nos toca mover a nosotros, junto a ∃loísa. Para ver qué N elegir, nos adelantemos a la siguiente movida de ∀belardo, a ver qué pasará al final.

3. ∀belardo jugará un n legal, es decir, tal que $n > N$. El enunciado que quedará finalmente es el siguiente:
$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \tag{6.4}$$
donde lo único que sabemos es que $n > N$.

Si tratamos de tener una expresión más explícita de n a partir de (6.4), podemos multiplicar ambos términos por $n \cdot \varepsilon^{-1}$, y obtenemos el siguiente enunciado equivalente:

$$\varepsilon^{-1} < n \tag{6.5}$$

Ahora, si recordamos que ∃loísa puede controlar a n mediante su elección de N, entonces una movida adecuada para ella es $N = \varepsilon^{-1}$ puesto que le asegura ganar, sin importar el n que luego elija ∀belardo (puesto que está obligado a jugar legalmente). $\square$

A continuación, destilaremos una prueba matemática tradicional a partir de lo que aprendimos del juego. Repetimos el enunciado:

Teorema 6.5 (Límite de la sucesión armónica)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demostración. Debemos demostrar

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

que es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

por ser $\frac{1}{n} > 0$.

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Al ser no nulo, podemos elegir $N = \varepsilon^{-1}$. Sea entonces $n > \varepsilon^{-1}$; como tanto n y ε son positivos, $\varepsilon \cdot \frac{1}{n}$ lo es y tenemos

$$\varepsilon \cdot \frac{1}{n} \cdot n > \varepsilon \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon^{-1}.$$

Simplificando obtenemos $\varepsilon > \frac{1}{n}$, que era lo que queríamos. ◻

Teorema 6.6 (Sucesión oscilante)**.** *La sucesión* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Demostración. Debemos ver que no existe un l que cumpla (6.1) para la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir que **no** se da

$$\exists l,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |(-1)^n - l| < \varepsilon.$$

Negar esta formula involucra cambiar todos los cuantificadores y finalmente negar la parte de adentro:[5]

$$\forall l,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N,\ \exists n > N,\ |(-1)^n - l| \geq \varepsilon. \tag{6.6}$$

La primera movida es de ∀belardo, un $l \in \mathbb{R}$ por lo demás completamente indeterminado, y del cual no tenemos control. Como la sucesión entre -1 y 1, una movida razonable para ∃loísa es $\varepsilon = 1$. Lo veamos.

∀belardo le toca jugar y elige algún N. A continuación, ∃loísa debe elegir un n. Esa movida debe ser legal (tiene que ser un natural mayor que N), así que para empezar tomemos un $M \in \mathbb{N}$ tal que $N < M$ (que existe por arquimedianidad).

Para especificar una estrategia adecuada para seleccionar ese n (i.e., que nos asegure $|(-1)^n - l| \geq 1$) analizaremos qué movió ∀belardo al comenzar el juego.

$\boxed{\text{Caso } l \leq 0.}$ Si tomamos $n = 2M$, se cumple que $n > M > N$ y

$$\begin{aligned}
|(-1)^n - l| &= |(-1)^{2M} - l| && \text{definición de } n,\\
&= |((-1)^2)^M - l| && \text{exponenciación,}\\
&= |1 - l| && \text{pues } (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Por hipótesis del caso $l \leq 0$, tenemos $l + 1 \leq 1$ y entonces $1 - l \geq 1$, lo que implica que $1 - l = |1 - l| \geq 1$, que era lo que queríamos.

$\boxed{\text{Caso } l > 0.}$ En este caso, la movida adecuada es $n = 2M + 1$; resulta legal y tenemos

$$\begin{aligned}
|(-1)^n - l| &= |(-1)^{2M+1} - l| && \text{definición de } n,\\
&= |(-1)^{2M}(-1) - l| && \text{exponenciación,}\\
&= |-1 - l| && \text{como arriba,}\\
&= 1 + l > 1,
\end{aligned}$$

y esto concluye la prueba. ◻

Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ***acotada superiormente*** (***inferiormente***) lo es como función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (Definición 5.21). Es decir, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente (inferiormente) si y sólo si el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente (inferiormente). Análogamente, diremos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ***acotada*** (a secas) si lo es superior e inferiormente.

Teorema 6.7. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Ejemplo 6.8. La recíproca del Teorema anterior no es cierta: basta considerar el Teorema 6.6.

Teorema 6.9 (Unicidad del límite)**.** *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l y converge a m, entonces $l = m$.*

Es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = m$, entonces $l = m$.

Lema 6.10 (Signo del límite)**.** *Una sucesión convergente tiene eventualmente el mismo signo que su límite. Es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$, entonces hay un N tal que para todo $n > N$, a_n tiene el mismo signo que l.*

Ejercicio 6.11. Demostrar el Lema 6.10.

Corolario 6.12. *Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$, entonces hay un N tal que $\forall n > N,\ a_n \neq 0$.*

6.2. Cálculo de límites

Teorema 6.13 (Límite de la suma)**.** *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes. Entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{6.7}$$

A continuación discutiremos los razonamientos que *permiten construir* la prueba de este teorema. Finalmente, escribiremos la demostración "pasada en limpio", que es la que se espera que Uds. puedan reproducir.

Sean $l := \lim_{n\to\infty} a_n$ y $m := \lim_{n\to\infty} b_n$. Por definición, tenemos

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N_1,\ \forall n > N_1,\ |a_n - l| < \varepsilon_1, \tag{6.8}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists N_2,\ \forall n > N_2,\ |b_n - m| < \varepsilon_2. \tag{6.9}$$

Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon. \tag{6.10}$$

Como antes, todo el trabajo se reduce a encontrar un N apropiado para cada ε. Nos concentramos en la parte final del objetivo: queremos

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon. \tag{6.11}$$

Como estamos suponiendo (6.8) y (6.9), tenemos "estrategias ganadoras" para obtener N_1 y N_2 apropiados para cualesquiera ε_1 y ε_2, respectivamente, que se nos presenten. Pero sólo podemos concluir algo sobre

$$|a_n - l| \qquad \text{y} \qquad |b_n - m|.$$

La idea es, entonces, buscar esas expresiones en (6.11). Reordenando, es equivalente a

$$|(a_n - l) + (b_n - m)| < \varepsilon.$$

Ahora, no podemos saber si el lado izquierdo es *igual* a alguna combinación de $|a_n - l|$ y $|b_n - m|$, pero ¡eso no importa! Lo crucial es **encontrar cotas** que nos permitan probar la desigualdad. Y como nos interesa acotar por arriba el valor absoluto de una suma, es buen momento para aplicar la Desigualdad Triangular 2.27. Luego tenemos,

$$|(a_n - l) + (b_n - m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m|;$$

y entonces, para probar (6.11) es suficiente probar

$$|a_n - l| + |b_n - m| < \varepsilon. \tag{6.12}$$

Repitiendo la idea que nos llevó hasta aquí, basta que acotemos cada uno de los sumandos $|a_n - l|$ y $|b_n - m|$ para que acotemos la suma. Por suerte, esto ultimo sabemos hacerlo por las estrategias ganadoras que tenemos: dados ε_1 y ε_2 positivos, podemos asegurar

$$\forall n > N_1,\ |a_n - l| < \varepsilon_1,$$
$$\forall n > N_2,\ |b_n - m| < \varepsilon_2.$$

y luego, si n es "suficientemente grande": a la vez mayor que N_1 y N_2, o equivalentemente $n > \max\{N_1, N_2\}$, tenemos ambas y luego:

$$|a_n - l| + |b_n - m| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{6.13}$$

Entonces, sabiendo esto último y queriendo (6.12), lo más natural (y suficiente) es buscar ε_1 y ε_2 tales que

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon.$$

Y de hecho, al ser $\varepsilon > 0$, elegir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ es legal, en el sentido que las estrategias ganadoras para (6.8)(6.9) nos dan N_1 y N_2 que aseguran

$$|a_n - l| + |b_n - m| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

para todo $n > \max\{N_1, N_2\}$. Luego la estrategia de elegir $N = \max\{N_1, N_2\}$ es ganadora para el juego dado por (6.10).

A continuación, la prueba "aséptica".

Demostración. Denotamos $l := \lim_{n\to\infty} a_n$ y $m := \lim_{n\to\infty} b_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existen N_1 y N_2 tales que

$$\forall n > N_1,\ |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.14}$$
$$\forall n > N_2,\ |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.15}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, supongamos que $n > N$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (l + m)| &= |(a_n - l) + (b_n - m)| && \text{por reordenación} \\
&\leq |a_n - l| + |b_n - m| && \text{Desigualdad Triangular} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && n > N_1, N_2 \text{ con (6.14) y (6.15)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. ⊔⊓

De la prueba anterior se puede rescatar un *truco* muy útil, que es el de ***dividir*** ε en varias partes (en nuestro caso, dos) para poder cumplir con varios requerimientos. No importa en cuantas partes lo hagamos, mientras que sean positivas todas.

Teorema 6.14 (Límite del producto)**.** *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes. Entonces la sucesión* $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, y se cumple*

$$\lim_{n\nearrow\infty} a_n.b_n = \lim_{n\nearrow\infty} a_n \cdot \lim_{n\nearrow\infty} b_n. \tag{6.16}$$

Repetiremos el esquema usado para el Teorema 6.13, explicando primero las ideas detrás de la prueba y finalmente pasándola en limpio. Queremos ver

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |(a_n \cdot b_n) - (l \cdot m)| < \varepsilon. \tag{6.17}$$

Igual que antes, queremos acotar $|(a_n \cdot b_n) - (l \cdot m)|$ usando las cotas para $|a_n - l|$ y $|b_n - m|$.

Hacer el producto de estos últimos (con la intención de que aparezca $a_n \cdot b_n$) no funcionará,

$$\begin{aligned} |a_n - l| \cdot |b_n - m| &= |(a_n - l) \cdot (b_n - m)| \\ &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot m - l \cdot b_n \underline{+ l \cdot m}| \end{aligned}$$

porque $l \cdot m$ queda con el signo contrario. Pero hay otra razón más profunda: las estrategias provistas por (6.8)(6.9) nos ayudan a hacer cada uno de los factores $|a_n - l|$ y $|b_n - m|$ pequeños, y luego su producto va a ser más pequeño aún (y acotar superiormente con algo muy chico es muy difícil). Así que necesitamos combinar $|a_n - l|$ y $|b_n - m|$ para que nos dé algo no tan minúsculo.

Entonces conviene recurrir a otro truco, que es modificar la expresión de interes sin cambiar su valor, ***sumando y restando lo mismo***. Como en (6.17) aparece $a_n \cdot b_n$, y tenemos manera de controlar el valor absoluto de $b_n - m$, podemos multiplicarlo por a_n y obtenemos $a_n \cdot b_n - a_n \cdot m$. Como $a_n \cdot m$ no aparece en la expresión original, lo hacemos aparecer sumando y restando:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - l \cdot m| &= |a_n \cdot b_n \underline{- a_n \cdot m + a_n \cdot m} - l \cdot m| \\ &= |a_n \cdot (b_n - m) + a_n \cdot m - l \cdot m| \\ &\leq |a_n \cdot (b_n - m)| + |a_n \cdot m - l \cdot m| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - m| + |a_n \cdot m - l \cdot m| \end{aligned}$$

Pero por suerte, ¡ahora también hay factor común m!

$$\begin{aligned} &= |a_n| \cdot |b_n - m| + |(a_n - l) \cdot m| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - m| + |a_n - l| \cdot |m|. \end{aligned}$$

Similarmente al ítem anterior, dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existen N_1, N_2 tales que

$$|a_n| \cdot |b_n - m| + |a_n - l| \cdot |m| \leq |a_n| \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |m|$$

para todos los $n > \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Ahora, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es acotada por el Teorema 6.7 y luego por el Lema 5.22 existe $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo n. Usando esto último y conectando las dos desigualdades anteriores, obtenemos

$$|a_n \cdot b_n - l \cdot m| \leq M \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |m|.$$

Ahora necesitamos que el lado derecho sea menor o igual que ε para lograr nuestro objetivo. Al tener dos sumandos, podemos aspirar a hacer cada uno menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; pero como están multiplicados por M y $|m|$, deberíamos elegir ε_1 y ε_2 que cancelen esas constantes. Por seguridad (si acaso $m = 0$, por ejemplo) tomemos $\varepsilon_2 := \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ y $\varepsilon_1 := \dfrac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - l \cdot m| &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} \cdot |m| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{M}{M+1} + \frac{|m|}{|m|+1} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1+1) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

para todos los $n > \text{máx}\{N_1, N_2\}$, siendo N_1, N_2 los provistos por (6.8)(6.9) para los $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ elegidos, y la elección para el N requerido por (6.17) es entonces $\text{máx}\{N_1, N_2\}$.

Demostración. Denotamos $l := \text{lím}_{n \to \infty} a_n$ y $m := \text{lím}_{n \to \infty} b_n$. Como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, es acotada por el Teorema 6.7 y luego existe $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\varepsilon_2 := \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ y $\varepsilon_1 := \dfrac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$ son ambos mayores a 0. Por hipótesis, existen N_1 y N_2 tales que

$$\forall n > N_1, \ |a_n - l| < \varepsilon_1, \tag{6.18}$$

$$\forall n > N_2, \ |b_n - m| < \varepsilon_2. \tag{6.19}$$

Luego, un N adecuado para satisfacer la definición de límite es $\text{máx}\{N_1, N_2\}$. Supongamos, entonces que $n > \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - l \cdot m| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot m + a_n \cdot m - l \cdot m| && \text{suma y resta } a_n \cdot m \\
&= |a_n \cdot (b_n - m) + (a_n - l) \cdot m| && \text{factor común} \\
&\leq |a_n \cdot (b_n - m)| + |(a_n - l) \cdot m| && \text{Desigualdad Triangular} \\
&= |a_n| \cdot |b_n - m| + |a_n - l| \cdot |m| \\
&\leq M \cdot |b_n - m| + |a_n - l| \cdot |m| && \text{cota } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\
&< M \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |m| && \text{por } n > N_2, N_1 \text{ y (6.18) (6.19)} \\
&= M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} \cdot |m| && \text{definición de } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{M}{M+1} + \frac{|m|}{|m|+1} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1+1) && \text{pues } M, |m| \geq 0 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. ⊞

Corolario 6.15. *Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{c \cdot a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, y se cumple*

$$\lim_{n \to \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \to \infty} a_n. \tag{6.20}$$

Demostración. Basta considerar la sucesión constantemente igual a c en el Teorema 6.14. ⊔⊓

El corolario anterior incluye el caso de que el límite de los opuestos es igual al opuesto del límite. Para los inversos, hay que tener un poco de cuidado: para concluir la convergencia de la sucesión de inversos no es suficiente pedir que todos los términos sean diferentes de cero (considerar la sucesión armónica).

Además, hay una observación que requiere cierta sutileza: *No es necesario que la sucesión esté totalmente definida para que el límite lo esté*. ¿Cuál es la explicación de esto? Veamos la definición de límite nuevamente, en su versión de la Ecuación (6.1):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |a_n - l| < \varepsilon. \tag{6.21}$$

En una interpretación (ciertamente admisible) de lo que está escrito, sólo estamos fijándonos en los valores de la sucesión más grandes que cierto N, y no importa qué sucede antes. Más concretamente, si suponemos que (6.21) es cierto, entonces será cierto, digamos para $\varepsilon := 1$, y habrá un N (imaginemos que es 42) que hace cierto

$$\forall n > 42,\ |a_n - l| < 1. \tag{6.22}$$

Esta última afirmación literalmente no se fija en $\{a_1, \dots, a_{42}\}$, así que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no estuviera definida en alguno de esos valores, no importaría. ¿Y si de repente se "pierde" el valor a_{44}, que sí se está considerando ahí? ¿O se me ocurre cambiarlo por algo totalmente distinto, como $l + 2$? Bueno, como (6.22) valía antes de estos cambios, entonces también será cierto

$$\forall n > 44,\ |a_n - l| < 1. \tag{6.23}$$

Así que (6.21) sigue siendo cierto, tomando un testigo para N un poco más grande.

Si pedimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienda a un límite no nulo, por el Corolario 6.12, debe ser eventualmente no nula, y entonces la sucesión de los inversos $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ estará definida para todos los n suficientemente grandes. Entonces podemos enunciar el siguiente resultado sin preocuparnos por los primeros términos.

Teorema 6.16. *Si* $\lim_{n\nearrow\infty} a_n$ *existe y es no nulo, la sucesión* $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, y se cumple*

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\nearrow\infty} a_n}. \tag{6.24}$$

Demostración. Como en el Teorema anterior, sea $l := \lim_{n\nearrow\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por definición, tenemos

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N',\ \forall n > N',\ |a_n - l| < \varepsilon_1. \tag{6.25}$$

y queremos ver

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon.$$

Sumando las fracciones, y distribuyendo el valor absoluto, esto equivale a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \frac{|l - a_n|}{|a_n| \cdot |l|} < \varepsilon. \tag{6.26}$$

Nuevamente, tenemos control de $|l-a_n| = |a_n-l|$, y necesitamos controlar el denominador (hacerlo *grande* para que el cociente sea chico). Por suerte, como a_n se va a aproximando a $l \neq 0$, en algún momento estará (digamos) cerca de $\frac{l}{2}$, así que el denominador nunca será más chico que $\left|\frac{l^2}{2}\right|$.

Entonces, para $\varepsilon_1 = \left|\frac{l}{2}\right|$, (6.25) nos da un N_1 tal que

$$|l - a_n| < \left|\frac{l}{2}\right|$$

para todo $n > N_1$. De aquí se deduce por Desigualdad Triangular que

$$|l| - |a_n| \leq |l - a_n| < \left|\frac{l}{2}\right| = \frac{1}{2}|l|$$

y despejando,

$$\frac{1}{2}|l| < |a_n|.$$

Multiplicando por $2 \cdot (|a_n| \cdot |l|^2)^{-1}$ ambos términos, obtenemos

$$\frac{1}{|a_n| \cdot |l|} < \frac{2}{|l|^2}, \tag{6.27}$$

para todo $n > N_1$. Ahora tomemos otro ε_1 en (6.25), esta vez $\varepsilon_1 := \dfrac{|l|^2}{2}\varepsilon$. Esto nos dará un N_2 tal que

$$\forall n > N_2,\ |a_n - l| < \frac{|l|^2}{2}\varepsilon. \tag{6.28}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, para todo $n > N$, valen tanto (6.27) como (6.28), y podemos multiplicarlas término a término, obteniendo

$$\frac{|a_n - l|}{|a_n| \cdot |l|} < \frac{2}{|l|^2} \cdot \frac{|l|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

que es lo que necesitamos para probar (6.26). ⊥

Corolario 6.17. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes, tales que $\lim_{n\nearrow\infty} b_n$ es no nulo. Entonces la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y se cumple*

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\nearrow\infty} a_n}{\lim\limits_{n\nearrow\infty} b_n}. \tag{6.29}$$

A continuación, probaremos un lema utilísimo para la justificación de existencia y cálculo de límites, mediante el uso de desigualdades.

Lema 6.18 (del Sandwich)**.** *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones tales que*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{6.30}$$

para todo n suficientemente grande, y supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite l. Entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a l.

Demostración. Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |b_n - l| < \varepsilon. \tag{6.31}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que

$$\exists N_1,\ \forall n > N_1,\ |a_n - l| < \varepsilon, \tag{6.32}$$

$$\exists N_2,\ \forall n > N_2,\ |c_n - l| < \varepsilon. \tag{6.33}$$

y que hay un M tal que (6.30) vale para todo $n > M$. La idea central es que como tanto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite, se deben acercar entre sí, así que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también debe acercarse al estar "sanguchada" por las anteriores. Tomemos los N_1 y N_2 provistos por (6.32) y (6.33). Si n es mayor que N_1, N_2 y M, obtenemos de esas dos condiciones (aplicando el Lema 2.31.1 una vez a cada uno) y de (6.30) que

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon.$$

Esto dice inmediatamente que $|b_n - l| < \varepsilon$, nuevamente por el Lema 2.31.1. Entonces, el N que necesitamos para (6.31) es $\max\{N_1, N_2, M\}$. ⊞

Lema 6.19. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión.*

1. (Convergencia del valor absoluto) *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|$.

2. (Valor absoluto tiende a 0) *Si* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Para el primer ítem, sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis de convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe un N tal que para todo $n > N$, tenemos

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$

pero aplicando el Ejercicio 2.32 obtenemos inmediatamente:

$$\big||a_n| - |l|\big| < \varepsilon,$$

que era lo necesitábamos probar.

Para el segundo ítem basta aplicar la idempotencia del valor absoluto a la hipótesis $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. ⊞

La recíproca al primer ítem no es cierta, como puede verse tomando la sucesión oscilante $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

6.3. Límites infinitos

Definición 6.20. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Diremos que el ***límite de*** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***es*** $+\infty$, o que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***tiende a*** $+\infty$ si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ M < a_n. \tag{6.34}$$

Escribiremos entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Diremos que el ***límite de*** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***es*** $-\infty$, y escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. si se da la condición dual:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ a_n < M. \tag{6.35}$$

Es importante notar que como ni $+\infty$ ni $-\infty$ son números reales, sino son simplemente **parte de la notación**, sólo diremos que el límite de una sucesión ***existe*** en el caso que sea finito. De todos modos, en la situación de la Definición 6.20, diremos que el límite de la sucesión ***está definido***.

La noción de que una sucesión "tienda a infinito" sirve para distinguir de entre las sucesiones divergentes, las que al menos tienen una "dirección" definida.*

Proposición 6.21. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

Demostración. Sale aplicando la definición directamente: dado M, el N que debemos tomar es el mismo M. ⊞

Ejemplo 6.22. No se da que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot n = +\infty$ ni $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot n = -\infty$.

6.4. Reglas de cálculo para límite infinito

Lema 6.23 (Cota con límite infinito)**.** *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones tales que* $a_n \leq b_n$ *para todo* n*. Entonces*:

1. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *entonces también* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *entonces también* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demostración. Las dos pruebas son iguales, así que haremos sólo la primera.

Usando la definición, queremos ver

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ b_n > M.$$

Sea M arbitrario. Por hipótesis sobre $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hay un N tal que

$$\forall n > N,\ a_n > M. \tag{6.36}$$

Exactamente ese N nos sirve como testigo. Como $b_n \geq a_n > M$, (6.36) implica[6] $\forall n > N,\ b_n > M$, y era justo lo que queríamos probar. ⊞

Ejemplo 6.24. $\left\{n^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Solución. Basta aplicar la regla de cota con límite infinito (Lema 6.23), con $a_n := n$ (que sabemos que se va a infinito por el Ejemplo 6.21). ⊞

Para el próximo resultado, necesitaremos la observación de que, para cualquier propiedad P que hable de números reales,

(≡) decir "$\forall M,\ P(M)$" es lo mismo que decir que "$\forall M,\ P(-M)$".

La justificación queda como ejercicio.[7]

*De todos modos, graficando varios términos de la sucesión $\{(2 + (-1)^n) \cdot n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede llegar a entender que lo de *dirección* hay que tomarlo con pinzas.

Lema 6.25 (Opuesto de límite infinito)**.** *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión. Entonces* $\lim_{n\nearrow\infty} a_n = -\infty$ *si y sólo si* $\lim_{n\nearrow\infty} -a_n = +\infty$.

Demostración. La afirmación $\lim_{n\nearrow\infty} a_n = -\infty$ es por definición:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ a_n < M.$$

Por la propiedad cancelativa de + con <, esto equivale a lo siguiente:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \underline{a_n + (-a_n - M) < M + (-a_n - M)}.$$

Simplificando y dando vuelta la desigualdad, lo anterior equivale a:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ -a_n > -M,$$

y por la propiedad (≡) esto equivale a la definición de $\lim_{n\nearrow\infty} -a_n = +\infty$. ⊥

Teorema 6.26. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones, y supongamos que* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $l \in \mathbb{R}$ *y que* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $+\infty$. *Entonces*:

1. (Inverso de límite infinito) $\lim\limits_{n\nearrow\infty} \dfrac{1}{b_n} = 0$.
2. (Producto con límite finito positivo) *Si* $l > 0$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $+\infty$.
3. (Producto con límite finito negativo) *Si* $l < 0$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $-\infty$.

Ejemplo 6.27. Calcular $\lim\limits_{n\nearrow\infty} \dfrac{-n^4 + 7n + 1}{4n^2 + 2}$.

Solución. Primero tenemos que identificar el ***orden de (de)crecimiento***, tanto de numerador como de denominador. Esto es, con qué "velocidad" se mueve cada uno, sea creciendo o decreciendo. Para estimar esta velocidad no importan los factores (o coeficientes) constantes.

El numerador $-n^4 + 7n + 1$ se mueve con velocidad n^4; estamos ignorando su coeficiente -1, y los otros sumandos, puesto que cuando n es grande, estos prácticamente no aportan al total.* En el caso del denominador, el orden es n^2.

El truco que vamos a aplicar ahora es sacar ***el orden como factor común***, tanto en numerador como en denominador. Esto nos da lo siguiente:

$$\frac{-n^4 + 7n + 1}{4n^2 + 2} = \frac{n^4 \cdot (-1 + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4})}{n^2 \cdot (4 + \frac{2}{n^2})} = \frac{n^4}{n^2} \cdot \frac{-1 + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^2}},$$

y simplificando los "órdenes", obtenemos

$$n^2 \cdot \frac{-1 + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^2}} \tag{6.37}$$

*Si $n = 10$, $-n^4$ es -10000 y $7n + 1$ es 71 (un 0,72 % del total en valor absoluto). Si $n = 100$, $-n^4$ es -100000000 y $7n + 1$ es 701 (menos del 0,001 % del total en valor absoluto). Este patrón sigue y se acentúa cada vez más.

Consideremos el factor de la derecha. Por las reglas de cálculo de límites finitos, el numerador tiende a -1 y el denominador a $4 \neq 0$, así que el límite del cociente es el cociente de los límites, y entonces

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{-n^4+7n+1}{4n^2+2} = \frac{\lim_{n\nearrow\infty} -1+\frac{7}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\lim_{n\nearrow\infty} 4+\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{4}.$$

Retomando la expresión (6.37), n^2 tiende a infinito por el Ejemplo 6.24 y el otro factor converge a $-\frac{1}{4}$. Por la regla del producto con límite finito negativo (Teorema 6.26.3), el límite es $-\infty$. ⊞

6.5. Otros resultados de límites infinitos

Lema 6.28. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión. Si* $\lim_{n\nearrow\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ *entonces* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada inferiormente* (*superiormente*).

Lema 6.29. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada inferiormente* (*superiormente*) *y supongamos que* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $+\infty$ $(-\infty)$. *Entonces la sucesión* $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $+\infty$ $(-\infty)$.

Demostración. Probaremos el resultado para el caso $+\infty$ únicamente. Por la hipótesis sobre $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sea C tal que

$$C \leq a_n \tag{6.38}$$

para todo n. Ahora, sobre $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sabemos que

$$\forall M_1,\ \exists N,\ \forall n > N,\ M_1 < b_n, \tag{6.39}$$

y queremos ver que

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall n > N,\ M < a_n + b_n, \tag{6.40}$$

Sea M arbitrario. Para $M_1 := -C + M$, (6.39) nos provee de un N tal que si $n > N$, se da $M_1 < b_n$. Sumando (6.38) a esto último miembro a miembro, obtenemos $M = C + M_1 < a_n + b_n$, con lo que obtenemos lo que queríamos. ⊞

En el enunciado siguiente, $\pm\infty$ significa que hay dos variantes, cual si estuviera escrito "$+\infty$ $(-\infty)$". Con el signo invertido $\mp$, las variantes van respectivamente al revés: "$-\infty$ $(+\infty)$".

Teorema 6.30. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones, y supongamos que* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $l \in \mathbb{R}$ *y que* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $\pm\infty$. *Entonces*:

1. $\lim_{n\nearrow\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$
2. $\lim_{n\nearrow\infty} -b_n = \mp\infty.$
3. *La sucesión* $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $\pm\infty$.
4. *Si* $l > 0$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $\pm\infty$.
5. *Si* $l < 0$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $\mp\infty$.

Demostración. El Ítem 3 se sigue del Lema 6.29 y el hecho de que una sucesión convergente es acotada, por el Teorema 6.7. ⊞

Más en general, los dos últimos ítems valen para sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que eventualmente estén apartadas (y de un solo lado) de 0.

Teorema 6.31. *Supongamos que* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tienden a* ∞. *Entonces*:

1. *La sucesión* $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* ∞.

2. *La sucesión* $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* ∞.

Resultados análogos cuando uno o ambos de los límites es negativo se pueden obtener combinando este resultado con el Teorema 6.30.2.

Se puede apreciar que hay varias situaciones no cubiertas por los resultados anteriores. Notablemente, no se ha enunciado una recíproca del Inverso de Límite Infinito (Teorema 6.26.1) como "si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0, entonces $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito"—por el simple hecho que no es cierta. De este modo, podemos señalar varias ***indeterminaciones*** de manera abreviada:

$$\frac{1}{0}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \infty-\infty,$$

esto es, situaciones en las que no puede calcularse el límite de una expresión sabiendo únicamente a qué tienden sus componentes. Por ejemplo, la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ indica que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienden a $\pm\infty$, entonces no podemos saber si acaso $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a un valor finito o a $\pm\infty$, o incluso peor que eso. Todas esas posibilidades pueden suceder.

Ejemplo 6.32 (Indeterminación $0\cdot\infty$)**.** En la siguiente tabla, tenemos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tienden a 0 e $+\infty$, respectivamente. En la penúltima fila, no hay límite (finito ni infinito) pero

a_n	b_n	$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$
$\frac{1}{n}$	n	1
$\frac{1}{n^2}$	n	0
$\frac{1}{n}$	n^2	$+\infty$
$-\frac{1}{n}$	n^2	$-\infty$
$\frac{(-1)^n}{n}$	n	**X**
$\frac{(-1)^n}{n}$	n^2	**X**

Tabla 2: $0\cdot\infty$ está indeterminado

el producto está acotado. En la última fila, ni siquiera eso.

6.6. Algunos límites notables

Proposición 6.33 (Sucesión constante)**.** *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es eventualmente constante e igual a* c, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Teorema 6.34 (Potencia límite)**.**

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \nexists & a < -1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & 1 < a \end{cases}$$

Teorema 6.35 (Radicación límite)**.** 1.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} \nexists & a < 0 \\ 0 & a = 0 \\ 1 & 0 < a \end{cases}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6.7. Subsucesiones

Las sucesiones, al ser funciones pueden ser (o no) estrictamente (de)crecientes o monótonas (de)crecientes. Repitiendo la Definición 5.23 para este caso, tenemos que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente si

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \implies k_n < k_m. \tag{6.41}$$

Ejercicio 6.36. Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente *de naturales*, entonces $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Ayuda: usar el Principio de Inducción).

Definición 6.37. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una ***subsucesión*** de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si existe alguna sucesión estrictamente creciente de naturales $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n = a_{k_n}$.

También decimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***admite*** (o "tiene") a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como subsucesión.

En el lenguaje de las funciones, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es subsucesión de $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si hay una $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $b = a \circ k$.

Teorema 6.38 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene admite una subsucesión convergente.*

Definición 6.39. La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ***de Cauchy*** si se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n, m,\ n, m > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{6.42}$$

Denotaremos dicha propiedad mediante $\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$.

Lema 6.40. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l. Luego basta sumar y restar l en la Ecuación (6.42) y usar $\frac{\varepsilon}{2}$ en la definición de límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

Lema 6.41. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Lema 6.42. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión que converge a l, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l.*

Demostración. Supongamos que $\left\{a_{k_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, donde $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un N_1 tal que

$$\forall n > N_1,\ |a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.43}$$

Veamos que el límite de a_n cuando n tiende a infinito es l. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, vale la Ecuación (6.42) para $\frac{\varepsilon}{2}$ y entonces existe N_2 tal que

$$\forall n, m > N_2,\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.44}$$

Tomemos $N := \max\{N_1, N_2\}$, y sea $n > N$. Veremos que $|a_n - l| < \varepsilon$.

Por el Ejercicio 6.36, tenemos que $k_n \geq n > N \geq N_2$, y luego

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &= |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - l| \\
&\leq \underline{|a_n - a_{k_n}|} + |a_{k_n} - l| && \text{Desigualdad triangular,} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \underline{|a_{k_n} - l|} && \text{por (6.44) y } n, k_n > N_2, \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{por (6.43) y } n > N_1 \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

quod erat demonstrandum.[8] ⊥

Teorema 6.43. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Son equivalentes*:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Demostración. El Lema 6.40 provee la dirección (2⇒1). Supongamos entonces que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy; probaremos que converge.

Por el Lema 6.41, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Entonces, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente. Pero finalmente, el Lema 6.42 implica que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ⊥

Corolario 6.44 (Sublímites distintos)**.** *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.*

Demostración. Probamos la contrarrecíproca: supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Por el Teorema 6.43, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sean $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesiones de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a l y a m, respectivamente. Por el Lema 6.42, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l y a m. Pero entonces $l = m$ por la unicidad del límite (Teorema 6.9). ⊥

7. Límite de funciones

7.1. Definición básica y límites laterales

Definición 7.1. Sea $a \in \mathbb{R}$. Un ***entorno*** de a es un intervalo abierto (x, y) que contiene a a (i.e., $x < a < y$).

Ejercicio 7.2. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $X \subseteq \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. X incluye un entorno de a;

2. Existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq X$.

Definición 7.3 (Límite de funciones)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$, f una función definida en un entorno de a (pero posiblemente no en a) y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que l es el ***límite*** de $f(x)$ "cuando x tiende a a" si se da la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Definición 7.4 (Límite ***lateral*** por izquierda)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$, f una función definida en algún intervalo abierto con extremo derecho a y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a ***por izquierda*** si se da la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a - \delta < x < a \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = l.$$

Definición 7.5 (Límite lateral por derecha)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$, f una función definida en algún intervalo abierto con extremo izquierdo a y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a ***por derecha*** si se da la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a + \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = l.$$

Tradicionalmente, se usan distintas notaciones para los límites laterales. Aquí hay una tabla de traducción:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x)$$

Teorema 7.6 (Relación entre límite y límite lateral)**.** *El límite de $f(x)$ existe y es igual a l si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales a l.*

Demostración. Basta ver que cada uno de los siguientes son pares de afirmaciones equivalentes:

- f está definida en un entorno de a, posiblemente no en a;
- f está definida en algún intervalo abierto con extremo derecho a, y también en algún intervalo abierto con extremo izquierdo a;

y

- $0 < |x - a| < \delta$;
- $a - \delta < x < a$ ó $a < x < a + \delta$,

para cada $\delta > 0$. ◫

7.2. Caracterización con sucesiones

A continuación, tenemos una caracterización del límite por izquierda (por derecha, respectivamente) usando límites de sucesiones.

Teorema 7.7 (Relación entre límite lateral y sucesiones)**.** *Supongamos que la función f está definida en un intervalo abierto con extremo derecho (izquierdo) a. Son equivalentes:*

1. $\lim_{x \nearrow a} f(x) = l$ ($\lim_{x \searrow a} f(x) = l$); *y*
2. *para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla:*
   a) $a_n \in \operatorname{Dom} f$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,
   b) $a_n < a$ ($a_n > a$),
   c) $\lim_{n\nearrow\infty} a_n = a$,

   se da que $\lim_{n\nearrow\infty} f(a_n) = l$.

Demostración. Lo hacemos para límites por la izquierda; el otro es completamente análogo (que, en caso de necesidad, queda como ejercicio).

(1 ⇒ 2) Supongamos que $\lim_{x\nearrow a} f(x) = l$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,\ a - \eta < x < a \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.4}$$

y que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con 2*a*, 2*b* y 2*c*. Queremos ver que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |f(a_n) - l| < \varepsilon. \tag{7.5}$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$. La hipótesis (7.4) nos provee de un $\eta > 0$ tal que

$$\forall x,\ a - \eta < x < a \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.6}$$

Aplicando el Ítem 2*c*, conseguimos un N tal que

$$\forall n > N,\ |a_n - a| < \eta. \tag{7.7}$$

Ése es el N requerido por (7.5). Sea $n > N$; por (7.7) y el Ítem 2*b*, concluimos que

$$a - \eta < a_n < a$$

así que aplicando (7.6) con $x := a_n$ tenemos $|f(a_n) - l| < \eta$, que era lo que queríamos.

($2 \Rightarrow 1$) Ahora, supongamos que para toda $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface 2*a*, 2*b* y 2*c*, se da (7.5), supongamos por el absurdo que no se da (7.4). Esto último quiere decir que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \eta > 0,\ \exists x,\ a - \eta < x < a \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon. \tag{7.8}$$

La hipótesis general sobre f dice que hay un $\delta > 0$ tal que f está definida en $(a - \delta, a)$. Consideremos ahora, como valores para η de (7.8), las distancias $\frac{\delta}{n}$. Para cada uno de ellos, existe un respectivo x, que llamaremos a_n, que satisface

$$a - \tfrac{\delta}{n} < a_n < a \quad \text{y} \quad |f(a_n) - l| \geq \varepsilon. \tag{7.9}$$

Por construcción, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con 2*a*, 2*b* y 2*c* así que, por hipótesis, $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l. Usando el ε dado, debe existir N tal que para todo $n > N$, debe darse

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon,$$

pero esto contradice (7.9). ⊥

Corolario 7.8 (Relación de límite con sucesiones)**.** *Supongamos que la función f está definida en un entorno de a (pero posiblemente no en a). Son equivalentes*:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l$; *y*
2. *para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla*:
   a) $a_n \in \operatorname{Dom} f$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,
   b) $a_n \neq a$,
   c) $\lim_{n\nearrow\infty} a_n = a$,

   se da que $\lim_{n\nearrow\infty} f(a_n) = l$.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Supongamos dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple con las tres hipótesis. Consideremos por una parte, los términos de la sucesión que son menores que a y por otra, los que son mayores que a. Al menos una de esas familias debe ser infinita* Si la otra es finita podemos descartarla para el argumento que sigue.

Entonces, podemos tomar la subsucesión $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los que son menores (respectivamente, mayores) que a y también tenderá a a. Ahora podemos aplicar la versión para límite por izquierda (derecha) del Teorema 7.7($\Rightarrow$): su hipótesis 1 se satisface en ambos casos gracias al Teorema 7.6($\Rightarrow$), y su conclusión 2 nos dice que $\{f(a_{k_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l. No es difícil ver que

*Más precisamente, sólo es necesario argumentar que al menos uno de los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < a\}$ ó $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n > a\}$ es infinito.

al haber cubierto todos los términos de una cola de la sucesión, se puede concluir que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a l.

(2 $\Rightarrow$ 1) Las sucesiones que cumplen con 2 del Teorema 7.7($\Leftarrow$) para límites por izquierda, también satisfacen las tres hipótesis de nuestro 2 actual. Por ende, concluimos que $\lim_{x\nearrow a} f(x) = l$. Lo mismo vale para las sucesiones de la versión del Teorema 7.7($\Leftarrow$) para límites por derecha, así que concluimos $\lim_{x\searrow a} f(x) = l$. Usando entonces el Teorema 7.6($\Leftarrow$), obtenemos 1. ◻

Ejercicio 7.9. Probar que si f y g están definidas en sendos entornos de a, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también lo están.

Teorema 7.10. *Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces*:

1. (*Límite de la suma*) *El límite $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ existe, y se cumple*
$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x). \tag{7.10}$$
2. (*Límite del producto*) *El límite $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ existe, y se cumple*
$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \tag{7.11}$$
3. *Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es no nulo, el límite $\lim_{x\to a} 1/f(x)$ existe y se cumple*
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}. \tag{7.12}$$

Demostración. Sale aplicando el Corolario 7.8 y los Teoremas 6.13, 6.14 y 6.16. ◻

Todos estos resultados valen para límites laterales.

Lema 7.11 (Límite de la composición)**.** *Supongamos que $a, l \in \mathbb{R}$ y que las funciones c y h cumplen que $c(x) \neq a$ en un entorno de b, $\lim_{x\to b} c(x) = a$ y $\lim_{y\to a} h(y) = l$. Entonces $\lim_{x\to b} h(c(x)) = l$.*

El lema anterior también admite variaciones con límites laterales, en el caso de la x que tiende a b. Por ejemplo,

Lema 7.12 (Límite de la composición)**.** *Supongamos que $a, l \in \mathbb{R}$ y que las funciones c y h cumplen que $c(x) \neq a$ en un entorno de b, $\lim_{x\searrow b} c(x) = a$ y $\lim_{y\to a} h(y) = l$. Entonces $\lim_{x\searrow b} h(c(x)) = l$.*

7.3. Límite (al) infinito

Agregamos las definiciones de límite cuando el argumento tiende a infinito (que es completamente análogo a los límites de sucesiones), y los límites infinitos.

Definición 7.13 (Límites al infinito)**.** Sean $a, l \in \mathbb{R}$ y f una función.

1. Supongamos que $f(x)$ está definida para todo x suficientemente grande. Diremos que l es el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** ∞ si se da la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.13}$$

   En tal caso, escribimos

$$\lim_{x\nearrow\infty} f(x) = l.$$

2. Supongamos que $f(x)$ está definida para todo x negativo con valor absoluto suficientemente grande. Diremos que l es el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** $-\infty$ si se da la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{7.14}$$

   En tal caso, escribimos

$$\lim_{x\searrow-\infty} f(x) = l.$$

Definición 7.14 (Límites infinitos)**.** 1. (Mismas hipótesis que la Definición 7.3) Diremos que el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** a ***es*** ∞ si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies M < f(x). \tag{7.15}$$

   De igual modo, el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** a ***es*** $-\infty$ si se cumple:

$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies M > f(x). \tag{7.16}$$

   Escribiremos, respectivamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

2. (Mismas hipótesis que la Definición 7.4) Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por izquierda es ∞ (respectivamente, $-\infty$) si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a - \delta < x < a \implies M < f(x)\ \ (\text{resp., } M > f(x)). \tag{7.17}$$

   En tal caso, escribimos $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \infty$ (resp., $\lim_{x\nearrow a} f(x) = -\infty$).

3. (Mismas hipótesis que la Definición 7.5) Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por derecha es ∞ (respectivamente, $-\infty$) si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a + \delta \implies M < f(x)\ \ (\text{resp., } M > f(x)). \tag{7.18}$$

   En tal caso, escribimos $\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty$ (resp., $\lim_{x\searrow a} f(x) = -\infty$).

4. (Mismas hipótesis que la Definición 7.13.1) Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es ∞ (respectivamente, $-\infty$) si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies M < f(x)\ \ (\text{resp., } M > f(x)). \tag{7.19}$$

   En tal caso, escribimos $\lim_{x\nearrow\infty} f(x) = \infty$ (resp., $\lim_{x\nearrow\infty} f(x) = -\infty$).

5. (Mismas hipótesis que la Definición 7.13.2) Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es ∞ (respectivamente, $-\infty$) si se da la siguiente condición:

$$\forall M,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies M < f(x) \ \ (\text{resp.}, M > f(x)). \tag{7.20}$$

En tal caso, escribimos $\lim_{x \searrow -\infty} f(x) = \infty$ (resp., $\lim_{x \searrow -\infty} f(x) = -\infty$).

En todos los casos de la Definición 7.14, diremos que el límite está ***está definido***, si bien diremos que de todos modos ***no existe***, por no ser dicho límite un número real.

7.4. Propiedades locales del límite

Si el límite de una función cuando su argumento tiende a es igual a $l \in \mathbb{R}$, todos sus valores para argumentos suficientemente cercanos a a están cerca de l. Por lo tanto, el comportamiento de la función cerca de a estará determinado por las propiedades de l.

En el siguiente lema vemos que, por estar cerca de l, los valores de f deben estar acotados.

Lema 7.15 (Acotación cerca del límite lateral)**.** *Si* $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ $(\lim_{x \searrow a} f(x))$ *existe, entonces f está acotada en un intervalo abierto con extremo derecho (izquierdo) a.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \nearrow a} f(x) = l$. Aplicando la definición de límite por izquierda para $\varepsilon := 1$, obtenemos un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x,\ a - \delta < x < a \implies |f(x) - l| < 1.$$

Es decir tenemos que para todo $x \in (a - \delta, a)$, $l - 1 < f(x) < l + 1$, así que $l - 1$ y $l + 1$ son respectivamente cota inferior y superior de f en ese intervalo abierto. ⊥

Corolario 7.16 (Acotación cerca del límite)**.** *Si* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe, entonces f está acotada en un entorno de a.*

Demostración. Por el lema anterior, f está acotada a la izquierda y a la derecha de a, así que está acotada en un entorno de a exceptuando a a mismo. Si f está definida en a, sólo falta tener en cuenta $f(a)$ en la cota, así que resulta acotada en todo el entorno. ⊥

A continuación, veremos que el signo de f cerca de a debe ser el mismo que el de l.

Lema 7.17 (Preservación de signo lateral)**.** *Si* $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ $(\lim_{x \searrow a} f(x))$ *es distinto de* 0*, entonces f tiene el mismo signo que el límite en un intervalo abierto con extremo derecho (izquierdo) a.*

Demostración. Supongamos primero que $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ existe y es igual a l. Aplicando la definición de límite por izquierda para $\varepsilon := \frac{l}{2}$, obtenemos un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x,\ a - \delta < x < a \implies |f(x) - l| < \frac{l}{2}.$$

Si l es positivo, tenemos que para todo $x \in (a - \delta, a)$, $l - \frac{l}{2} < f(x)$, y en consecuencia

$$0 < \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < f(x).$$

El caso de que l es negativo es análogo, puesto que para los mismos x se tiene

$$f(x) < l - \frac{l}{2} < \frac{l}{2} < 0.$$

Si $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$, tomamos $M = \pm 1$ en la definición de límite por izquierda infinito, y obtenemos un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x,\ a - \delta < x < a \implies f(x) > 1\ (f(x) < -1),$$

así que tenemos el resultado. ⊞

Corolario 7.18 (Preservación de signo)**.** *Si* $\lim_{x \to a} f(x)$ *es distinto de* 0*, entonces* f *tiene el mismo signo que el límite en un entorno de* a (*salvo, eventualmente, en* a). ⊞

8. Funciones continuas

Definición 8.1 (Continuidad en un punto)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$ y f una función. Diremos que f es ***continua en*** a si

1. f está definida en un entorno de a.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que el primer ítem de la definición es requisito para que el segundo tenga sentido. Expandiendo la definición de límite en el segundo ítem, obtenemos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Notemos que el consecuente vale siempre si reemplazamos x por a, así que podemos tomar la siguiente caracterización alternativa de continuidad en un punto, que admite el valor $x = a$ en el antecedente:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Ejemplo 8.2. La función identidad $I(x) := x$ y las funciones constantes $f(x) := c$ (con $c \in \mathbb{R}$) son continuas en todo $a \in \mathbb{R}$.

A continuación veremos una caracterización alternativa de continuidad utilizando los límites laterales que es útil pero en principio no usaremos en clase.

Definición 8.3 (Continuidad lateral)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$ y f una función. Diremos que f es ***continua por derecha*** (***por izquierda***) en a si

1. f está definida en $[a, a + \delta)$ (resp., $(a - \delta, a]$) para algún $\delta > 0$.

2. $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ (resp., $\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$).

Por la relación entre límite y límite lateral (Teorema 7.6), tenemos que una función es continua en un punto si lo es por izquierda y por derecha.

8.1. Propiedades locales

Las propiedades locales del límite (Sección 7.4) son automáticamente heredadas por las funciones continuas.

Lema 8.4 (Acotación local)**.** *Si f es continua en a entonces f está acotada en un entorno de a.*

Demostración. Como el límite existe, se aplica el Corolario 7.16. ∎

Lema 8.5 (Preservación de signo)**.** *Si f es continua en a y $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), entonces f es mayor (menor) que 0 en un entorno de a.*

Demostración. Se aplica el Corolario 7.18, notando que el límite es exactamente $f(a)$. ∎

Propiedades análogas a las anteriores valen en general para funciones continuas por derecha o por izquierda, con los entornos reemplazados por “medios entornos” $[a, a + \delta)$ ó $(a - \delta, a]$, respectivamente.

8.2. Aritmética de funciones continuas

Ejercicio 8.6. Probar que si f es continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ está definida en un entorno de a. (Ayuda: Lema 8.5).

Teorema 8.7. *Sean f y g continuas en a. Entonces*

1. *$f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en a.*
2. *Si $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ es continua en a.*

Demostración. Usando los Ejercicios 7.9 y 8.6 sabemos que las nuevas funciones están definidas en un entorno de a. Luego es suficiente ver que cada límite coincide con el valor de la respectiva función; pero eso sale del Teorema 7.10. ∎

Ejemplo 8.8.

1. Todo polinomio en x es una función continua en todo $a \in \mathbb{R}$.
2. Toda función ***racional*** (cociente de polinomios) es una función continua en todo $a \in \mathbb{R}$ tal que el denominador sea distinto de 0.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 8.7 junto al Ejemplo 8.2. ∎

Se puede ver (usando el Lema 8.5) que el segundo ítem corresponde a decir que las funciones racionales son continuas en todo elemento de su dominio.

Ejercicio 8.9. Sean f y g continuas en a. Entonces:

1. $-f$ es continua en a.
2. $f - g$ es continua en a.

8.3. Los Teoremas Fuertes

Definición 8.10 (Continuidad en un conjunto)**.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es ***continua en todo*** I si para todo $x \in I$, f es continua en x.

> **Advertencia.** Esta definición tiene sentido principalmente cuando I es un *intervalo abierto*, y de hecho normalmente se usa una definición más laxa (Definición A.1) para el caso de intervalos cerrados. Consultar el Apéndice A.

El siguiente resultado se basa fundamentalmente en dos observaciones: que las funciones continuas mantienen el signo cerca de cada punto de su dominio (donde sean no nulas) y el Axioma de Completitud.

Teorema 8.11 (Primer Teorema Fuerte — Bolzano)**.** *Supongamos que f es continua en todo $[a, b]$ y que $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces existe $r \in (a, b)$ tal que $f(r) = 0$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}. \tag{8.2}$$

Este conjunto está incluido en $[a, b]$, y por lo tanto está acotado superiormente por b. Además es no vacío, pues $a \in A$. Luego, A debe tener un supremo r, que por ser (la menor) cota superior debe ser mayor o igual que a (menor o igual que b). Comencemos observando que $a < r < b$: para la primera desigualdad, notemos que por el Lema 8.5 hay un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ de a tal que f es negativa ahí. Luego $[a, a + \delta) \subseteq A$ por (8.2) y luego $a + \delta \leq r$ por ser r cota. Similarmente se puede probar la segunda desigualdad.

Es suficiente entonces probar que $f(r) = 0$. Lo haremos por el absurdo: supongamos que $f(r) \neq 0$. Nuevamente por el Lema 8.5 asegura que hay un entorno $(r - \delta, r + \delta)$ (con $\delta > 0$) tal que f conserva su signo ahí. Trataremos separadamente según sea $f(r) < 0$ ó $f(r) > 0$:

$\boxed{\text{Caso } f(r) < 0.}$ Como f es negativa en el entorno $(r - \delta, r + \delta)$, se debe dar $f(r + \frac{\delta}{2}) < 0$ y luego $r + \frac{\delta}{2} \in A$. Pero entonces r no es cota, un absurdo.

$\boxed{\text{Caso } f(r) > 0.}$ Como r es cota de A, cualquier $y \in (r, b]$ debe cumplir que $f(y) \geq 0$. Como f es positiva en r, lo debe ser el entorno, así que $f(y) \geq 0$ para todo $y \in (r - \delta, r + \delta)$. En conclusión, A debe estar incluido en $[a, r - \delta]$ y luego $r - \delta$ es cota superior. Pero esto contradice el hecho que r era la *menor* cota. ◻

Corolario 8.12 (Teorema de los Valores Intermedios)**.** *Si g es continua en $[a, b]$, g alcanza todos los valores entre $g(a)$ y $g(b)$.*

Demostración. Supongamos primero que $g(a) < c < g(b)$. Entonces la función $f(x) := g(x) - c$ es continua por el Ejercicio 8.9 y cumple con las hipótesis del Teorema de Bolzano, así que existe r tal que $f(r) = 0$. Reemplazando por su definición, obtenemos que $g(r) - c = 0$, esto es, $g(r) = c$.

Si las desigualdades son al revés $g(a) > c > g(b)$, tomar $f(x) := c - g(x)$ y el razonamiento es igual. ◻

Teorema 8.13 (Segundo Teorema Fuerte)**.** *Supongamos que f es continua en todo $[a, b]$. Entonces f es acotada superiormente.*

Demostración. Es similar a la del Teorema de Bolzano. Definamos en este caso

$$A := \{x \in [a, b] \mid f \text{ es acotada superiormente en } [a, x)\}. \tag{8.3}$$

El extremo izquierdo a está en A, puesto que f está acotada (por cualquier número) en $[a, a) = \emptyset$. Como A está acotado por superiormente b, $s := \sup A$ existe y es menor o igual a b. Veremos que efectivamente es igual a b, y luego que esto implica el resultado.

Observemos primero que como f es continua en s, está acotada en $(s-\delta, s+\delta)$ para algún $\delta > 0$. Como s es la menor cota superior de A, debe haber algún $y \in A$ tal que $s - \delta < y$; luego f resulta acotada tanto en $[a, y)$ como en $(s - \delta, s + \delta)$; en conclusión,

$$f \text{ es acotada en } [a, s + \delta). \tag{8.4}$$

Notemos que por (8.4) no puede darse $s < b$, puesto que $\text{mín}\{s+\delta, b\} \in A$ y luego s no podría ser una cota. Luego $s = b$. Usando (8.4) con esta información nueva, concluimos que f es acotada en $[a, b+\delta)$ y luego es acotada en $[a, b]$. ◻

Corolario 8.14. *Supongamos que g es continua en $[a, b]$. Entonces g es acotada inferiormente.*

Demostración. Tomar la función continua $f := -g$ en el Teorema 8.13. ◻

El último Teorema Fuerte dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo.

Teorema 8.15 (Tercer Teorema Fuerte)**.** *Supongamos que f es continua en $[a, b]$. Entonces existe $m \in [a, b]$ tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(m) \geq f(x)$.*

Demostración. Por el Segundo Teorema fuerte, el conjunto $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ está acotado y es obviamente no vacío. Luego tiene supremo c. Un m como el de la tesis cumpliría que $f(m) = c$.

Supongamos por el absurdo que no hay tal m. Entonces la función $g(x) := \frac{1}{c-f(x)}$ es continua en $[a, b]$ por el Teorema 8.7 (y la versión para límites laterales del Teorema 7.10 para los bordes). Por el Segundo Teorema Fuerte, g debe tener una cota superior M, que sin pérdida de generalidad se puede tomar mayor que 0. Entonces tenemos

$$\frac{1}{c - f(x)} \leq M \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Despejando, tenemos

$$\frac{1}{M} \leq c - f(x)$$

y luego

$$f(x) \leq c - \frac{1}{M} \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Esto significa que $c - \frac{1}{M}$ es cota superior de f, lo que contradice que c era la menor. ◻

Corolario 8.16. *Supongamos que g es continua en $[a, b]$. Entonces g alcanza su mínimo en $[a, b]$.*

Demostración. Tomar $f := -g$ en el Teorema 8.15. ◻

9. Derivadas

Definición 9.1. Sea f una función y $a \in \mathbb{R}$. Diremos que f es ***derivable*** en a si existe el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{9.1}$$

En ese caso, llamaremos a su valor la ***derivada*** de f en a y la denotaremos $f'(a)$. El cociente dentro del limite de (9.1) se denomina ***razón*** o ***cociente incremental***.

En general, denotaremos por f' a la función que asocia a cada punto donde f es derivable, el valor de su derivada.

Hay diversas otras notaciones para la función derivada de f:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dy}{dx},$$

donde en la última opción se supone que uno escribió $y = f(x)$. Cuando uno evalúa en un punto a, $f'(a)$ se puede escribir así:

$$\frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_a, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_a,$$

9.1. Cálculo de derivadas

Las reglas de la aritmética de límites inmediatamente nos proveen de reglas para calcular las derivadas de la suma, producto y recíprocos de funciones.

Lema 9.2. *Supongamos que f y g son derivables en a.*

1. *$f + g$ es derivable en a y se cumple que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

2. (Regla de Leibnitz) *$f \cdot g$ es derivable en a y se cumple que $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.*

Demostración. El primer ítem queda como ejercicio trivial usando aritmética de límites, y el segundo sale desarrollando la razón incremental y aplicando el truco de sumar y restar lo mismo (en este caso, $f(a) \cdot g(a+h)$) en el numerador. ∎

Lema 9.3 (Derivada de la recíproca)**.** *Si g es derivable en a y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en a y se tiene*:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g(a)^2} \cdot g'(a). \tag{9.2}$$

Demostración. Trabajemos con el cociente incremental correspondiente a la definición de $\left(\frac{1}{g}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{(1/g)(a+h)-(1/g)(a)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{g(a+h)}-\dfrac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)}}{h} \\
&= \frac{1}{g(a+h)g(a)}\cdot\frac{g(a)-g(a+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g(a+h)g(a)}\cdot\left(-\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \\
&= -\frac{1}{g(a+h)g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}
\end{aligned}$$

Si tomamos límite cuando $h\longrightarrow 0$, el primer factor tenderá a $-\frac{1}{g(a)^2}$ (puesto que g es continua en a), mientras que el segundo lo hará a $g'(a)$. Luego el límite de la razón incremental para $1/g$ existe y se cumple la identidad del enunciado. ◻

Aplicando la Regla de Leibnitz para $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, obtenemos inmediatamente:

Corolario 9.4 (Derivada del cociente)**.** *Si f y g son derivables en a, y $g(a)\neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y se tiene*:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{g(a)}-\frac{f(a)}{g(a)^2}\cdot g'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}=\left(\frac{(f\cdot g)'}{g^2}\right)(a). \quad ◻ \tag{9.3}$$

Teorema 9.5 (Regla de la Cadena)**.** *Si f es derivable en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es derivable en a y se cumple*:

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a). \tag{9.4}$$

Si decimos que

$$y=f(x) \qquad z=g(y) \qquad z=g(f(x)), \tag{9.5}$$

entonces la notación diferencial resulta muy conveniente para recordar la Regla de la Cadena:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

donde, reemplazando parcialmente por las Ecuaciones (9.5), obtenemos

$$\frac{d\,g(f(x))}{dx}=\frac{d\,g(y)}{dy}\cdot\frac{d\,f(x)}{dx}=g'(y)\cdot f'(x).$$

Al evaluar en a obtenemos $y=f(a)$ y entonces

$$(f\circ g)'(a)=\left.\frac{d\,g(f(x))}{dx}\right|_a=g'(f(a))\cdot f'(a),$$

que es la versión original.

Teorema 9.6 (Derivada de la inversa)**.** *Si f es continua en un intervalo con inversa f^{-1}, es derivable en $f^{-1}(a)$ y $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en a y se tiene*:

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}. \tag{9.6}$$

10. Aplicaciones de la derivada

10.1. Extremos locales

Definición 10.1. Sea f una función y $c \in \mathbb{R}$.

1. Decimos que c es un ***máximo local*** de f si $f(c)$ es el máximo valor de f en un entorno de c. Equivalentemente, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) \leq f(c)$.

2. Decimos que c es un ***mínimo local*** de f si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) \geq f(c)$.

3. En general, si c es un máximo o mínimo local de f, decimos que c es un ***extremo local*** de f.

Lema 10.2 (Extremos locales son críticos)**.** *Sea f derivable en c. Si c es un extremo local de f, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Lo haremos para el caso que c es un mínimo local. Consideremos la definición de $f'(c)$; por la relación con límites laterales (Teorema 7.6), tenemos:

$$f'(c) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Para valores de h suficientemente chicos en valor absoluto, se va a cumplir $f(c+h) \geq f(c)$ por ser mínimo local, así que $f(c+h) - f(c) \geq 0$.

Ahora, el primer límite involucra valores positivos de h, y luego el cociente incremental es no negativo. En cambio, en el segundo límite, los valores de h son negativos así que el cociente incremental es no positivo. En conclusión, la única manera que ambos coincidan y límite exista es que éste sea igual a 0. ∎

Teorema 10.3 (Rolle)**.** *Sea g continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $g(a) = g(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.*

Demostración. Por la hipótesis de continuidad de g, el 3er Teorema Fuerte 8.15 y su Corolario 8.16 implican que ésta alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$. Es decir, hay $m, n \in [a, b]$ tales que $f(n) \leq f(x) \leq f(m)$ para todo $x \in [a, b]$. Si $f(n) = f(m)$, entonces f es constante en $[a, b]$ y su derivada es nula *en todo* (a, b), así cualquier x ahí sirve para la conclusión. En caso contrario, al menos uno de m, n no es ni a ni b (pues $f(a) = f(b)$). Ése es entonces un extremo local y por el Lema 10.2, obtenemos que g' se anula ahí. ∎

Teorema 10.4 (del Valor Medio, ***TVM***)**.** *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Demostración. Éste es uno de los casos donde la idea "obvia" funciona: aquí, se corresponde con "enderezar" el grafico de f para que en los extremos valga lo mismo y poder aplicar el Teorema de Rolle. Y para ello, es suficiente restarle la recta que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

Entonces, consideremos la función g definida en $[a,b]$ por:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a). \tag{10.1}$$

Esta función es la suma de f con una función lineal, así que es continua (respectivamente, derivable) donde f lo es. Es elemental comprobar que $g(a) = g(b) = f(a)$. Entonces se le puede aplicar el Teorema de Rolle 10.3 y luego existe $c \in (a,b)$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Despejando $f'(c)$ obtenemos la tesis. ◻

No confundir el resultado anterior (valor *medio*) con el Corolario 8.12 (valores *intermedios*).

Corolario 10.5. (*Mismas hipótesis que el TVM*)*. Si $f'(x) = 0$ en todo (a,b) entonces f es constante en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que existen $a \leq x < y \leq b$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Como f es continua en $[a,b]$, lo es en $[x,y]$ y entonces por el TVM existe un $c \in (x,y)$ tal que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \neq 0$. Pero esto contradice la hipótesis. Concluimos que f debe ser constante. ◻

Corolario 10.6. (*Mismas hipótesis que el TVM*)*. Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) en todo (a,b) entonces f es estrictamente (de)creciente.*

Demostración. Lo hacemos para el caso positivo; es muy similar a la prueba del Corolario 10.5. Supongamos, por el absurdo que hay $a \leq x < y \leq b$ tales que $f(x) \geq f(y)$. Aplicando el TVM existe un $c \in (x,y)$ tal que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$, un absurdo. ◻

10.2. Convexidad y concavidad

Definición 10.7. Sea f una función e $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ un intervalo.

1. Decimos que f es ***convexa en I*** si para todos $a, b \in I$, $a < b$ implica

$$\forall x \in (a,b), \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{10.2}$$

2. Decimos que f es ***cóncava en I*** si para todos $a, b \in I$ tales que $a < b$, se cumple (10.2) con la desigualdad invertida ($>$).

Ejercicio 10.8. Ver que f es cóncava en I si y sólo si $-f$ es convexa en I.

Es importante insistir que las nociones de convexidad y concavidad sólo tienen sentido en todo un intervalo; no tiene sentido decir "f es convexa en x". Más aún, denotemos $\mathrm{Conv}(f, a, b)$ la propiedad (10.2); luego, la Definición 10.7 dice que f es convexa en I si

$$\forall a, b \in I, \quad a < b \implies \mathrm{Conv}(f, a, b).$$

Hay que tener cuidado de no confundir la definición de convexidad (que habla de f e I) con $\mathrm{Conv}(f, a, b)$ (que habla de f y (a, b)). En particular, *I no necesariamente es (a, b) ni $[a, b]$* en la Definición 10.7.[9] Por las dudas, dejamos a continuación una versión equivalente de la definición: f es convexa en I si y sólo si

$$\forall a, x, b \in I, \quad a < x < b \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{10.3}$$

El siguiente lema trabaja bajo las mismas hipótesis de Teorema de Rolle.

Lema 10.9. *Sea g continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $g(a) = g(b)$. Si g' es estrictamente creciente en (a, b), entonces $g(x) < g(a)$ para todo $x \in (a, b)$.*

Demostración. En vista de la hipótesis de continuidad de g, ésta alcanza su máximo en $[a, b]$ por el 3er Teorema Fuerte 8.15. Veremos que no es posible que lo alcance en el interior (a, b), así que debe hacerlo en a (por la hipótesis $g(a) = g(b)$). Por lo tanto, en todo punto $x \in (a, b)$, $g(x)$ es menor al máximo $g(a)$.

Supongamos por el absurdo que hay $m \in (a, b)$ tal que $g(m)$ es el máximo de g en $[a, b]$. En particular, m es un extremo local y por ende $g'(m) = 0$. Aplicamos ahora el TVM 10.4 a g en el intervalo $[m, b]$ y entonces debe existir un $c \in (m, b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(m)}{b - m} \leq 0,$$

(pues $g(b) \leq g(m)$). Pero esto contradice que g' es creciente, puesto que $m < c$ y $g'(m) = 0$. ◻

Corolario 10.10. *Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y f' es estrictamente creciente en (a, b), entonces para todo $x \in (a, b)$ se tiene:*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{10.4}$$

Demostración. Se utiliza exactamente la misma idea que en la prueba del TVM: definimos g en $[a, b]$ como en la Ecuación (10.1), que resulta tener las mismas propiedades descritas ahí. En particular, su derivada es igual a la de f más una constante, así que también es creciente (esto es inmediato, o también se sigue del Ejercicio 5.24.2). En conclusión, g cumple todas las hipótesis del Lema 10.9, así que para todo $x \in (a, b)$, se da $g(x) < g(a)$. Expandiendo esto último, obtenemos

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) < g(a) = f(a),$$

y despejando, obtenemos la Ecuación (10.4). ◻

Teorema 10.11. *Sea f derivable en un intervalo I. Si f' es estrictamente creciente en I, f es convexa en I.*

Demostración. Sean $a < b$ en I. Como f es derivable en I, f es continua en x para todo $x \in I$, y esto implica que es continua en $[a, b]$. Se satisfacen entonces todas las hipótesis del Corolario 10.10 y luego para todo $x \in (a, b)$, tenemos (10.4). Como esto vale para $a, b \in I$ arbitrarios, concluimos que f es convexa. ⊞

Corolario 10.12. *Sea f derivable en un intervalo I. Si f' es estrictamente decreciente en I, f es convexa en I.*

Demostración. Basta aplicar los Ejercicios 10.8 y 5.25. ⊞

Corolario 10.13. *Sea I un intervalo. Si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f es convexa (cóncava) en I.*

Demostración. Supongamos que $f''(x) > 0$. Por el Corolario 10.6, obtenemos que f' es creciente y se aplica el Teorema 10.11.

Para el caso de derivada segunda negativa, aplicar el Corolario 10.12 y el Ejercicio 10.8. ⊞

Teorema 10.14. *Si f es convexa en I, entonces f' es creciente donde está definida. Es decir, si $x, y \in I \cap \operatorname{Dom} f'$, entonces $x < y \implies f'(x) < f'(y)$.* ⊞

Definición 10.15. Sea f función y $c \in \mathbb{R}$. Decimos que c es un ***punto de inflexión*** de f si f es convexa (cóncava) en un intervalo con extremo derecho c y cóncava (convexa) en un intervalo con extremo izquierdo c.

10.3. La regla de L'Hôpital

Si f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[a, b]$, escribimos $\Delta x := b - a$ para el incremento en el argumento y $\Delta f := f(b) - f(a)$ para el correspondiente incremento en el valor de f, la conclusión de dicho teorema dice que existe un $c_1 \in (a, b)$ tal que

$$f'(c_1) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Si ahora consideramos otra g que cumple las mismas hipótesis, sabemos que existirá un c_2 que cumplirá

$$g'(c_2) = \frac{\Delta g}{\Delta x},$$

y dividiendo miembro a miembro, concluimos que

$$\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{\Delta f}{\Delta g}.$$

El resultado que probaremos a continuación dice que se puede obtener esta última ecuación con $c_1 = c_2$. Primero notemos que $\Delta g = g(b) - g(a)$ podría haber sido nulo, así que para enunciarlo en general despejaremos los denominadores.

Teorema 10.16 (TVM de Cauchy)**.** *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c). \tag{10.5}$$

Demostración. Generalicemos la Ecuación (10.5), y cambiemos el c por un $x \in (a, b)$. La idea aquí es codificar la igualdad que buscamos como una diferencia que se hace cero. Es decir, queremos encontrar un x tal que

$$(g(b) - g(a)) \cdot f'(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = 0.$$

Ahora, la expresión de arriba es justamente la derivada de la siguiente función h:

$$h(x) := (g(b) - g(a)) \cdot f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g(x).$$

Se ve fácilmente que $h(a) = h(b)$, y como h resulta continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) se puede aplicar el Teorema de Rolle, y el $c \in (a, b)$ provisto cumple con (10.5). ⊔⊓

Teorema 10.17 (Regla de L'Hôpital)**.** *Supongamos que*:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*,* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*, y*
- $\lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l \in \mathbb{R}$.

Entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe y coincide con* l*.*

Demostración. Recordemos que una condición necesaria para la existencia de un límite $\lim_{x\to a} h(x)$ es que h esté definida en $U \setminus \{a\}$, para algún entorno U de a (decimos que está definida en un entorno ***pinchado*** de a). Por tal motivo, la segunda hipótesis implica que

1. f' y g' están definidas en un entorno pinchado $U \setminus \{a\}$ de a.
2. $g' \neq 0$ en $U \setminus \{a\}$.

Por el Ítem 1, f y g son continuas en un entorno pinchado de a. (Re)defininiéndolas (en caso de ser necesario) como 0 en a, obtenemos

3. f y g son continuas en un entorno V de a.

Finalmente, se tiene:

4. $g \neq 0$ en $U \setminus \{a\}$.

Si no fuera así, habría un punto $x \in U \setminus \{a\}$ donde $g(x) = 0 = g(a)$. Pero por el Teorema de Rolle, habría c entre x y a (y por ende en $U \setminus \{a\}$) tal que $g'(c) = 0$; una contradicción.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $U = V = (a - \delta, a + \delta)$ para algún $\delta > 0$ (ejercicio). La tesis se prueba, entonces, viendo que ambos límites laterales $\lim_{x\nearrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existen y valen l. Lo haremos únicamente para este último.

Sea $x \in (a, a + \delta)$. Por el TVM de Cauchy 10.16, existe $c_x \in (a, x)$ tal que

$$(f(x) - f(a)) \cdot g'(c_x) = (g(x) - g(a)) \cdot f'(c_x).$$

Reemplazando $f(a) = g(a) = 0$ y notando que $g(x)$ y $g'(c_x)$ son ambos no nulos (pues $x, c_x \in U \setminus \{a\}$), podemos pasarlos dividiendo y obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{10.6}$$

Consideremos ahora las funciones $c(x) := c_x$ y $h(y) := \frac{f'(y)}{g'(y)}$. Aplicaremos el Lema 7.12 con $b = a$; verifiquemos que podemos hacerlo. Por hipótesis, tenemos que $\lim_{y\to a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(y) = l$. Además, como $a < c(x) < x$, el Lema del Sandwich dice que $\lim_{x\searrow a} c(x) = a$. Entonces obtenemos

$$\lim_{x\searrow a} h(c(x)) = l,$$

Pero la Ecuación (10.6) dice que $\frac{f}{g} = h \circ c$, así que concluimos

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

La prueba de que el límite por izquierda también es l es análoga. ⊡

11. Fundamentos de los números reales

11.1. El cuerpo de los reales

En esta sección presentamos una versión ligeramente distinta de los axiomas de cuerpo, y demostraremos algunas de las propiedades enunciadas en la Sección 2. Aquí usamos solamente los conceptos $\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot$, y el resto se puede definir.

P1	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a + (b + c) = (a + b) + c.$	**Asociativa (+)**
P2	$\forall a,$	$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 0 + a = a.$	**Neutro (+)**
P3	$\forall a\, \exists n,$	$a + n = 0 = n + a.$	**Opuesto**
P4	$\forall a\, b,$	$a + b = b + a.$	**Conmutativa (+)**
P5	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$	**Asociativa (·)**
P6	$\forall a,$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$	**Neutro (·)**
P7	$\forall a \neq 0\, \exists v,$	$a \cdot v = 1 = v \cdot a.$	**Inverso**
P8	$\forall a\, b,$	$a \cdot b = b \cdot a.$	**Conmutativa (·)**
P9	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R},$	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$	**Distributiva**

Tabla 3: Variante de los axiomas de cuerpo.

Lema 11.1 (Unicidad del opuesto)**.** *Sean $n, m \in \mathbb{R}$ que cumplen* P3 *para a. Entonces $m = n$.* ⊡

Definición 11.2. Para cada $a \in \mathbb{R}$, el ***opuesto*** de a, denotado por $-a$ como el único n que cumple $a + n = 0 = n + a$.

Una vez disponible el opuesto, se puede usar la Definición 2.1 que dimos para la resta.

P10	$\forall a\, b \in \mathbb{R}$,	$a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$	**Tricotomía**
P11	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R}$,	$a < b$ y $b < c$ implican $a < c$	**Transitividad**
P12(+)	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R}$,	$a < b$ implica $a + c < b + c$	**Monotonía (+)**
P12($\cdot$)	$\forall a\, b\, c \in \mathbb{R}$,	$a < b$ y $0 < c$ implican $a \cdot c < b \cdot c$	**Monotonía ($\cdot$)**

Tabla 4: Axiomas de orden.

11.2. Orden

Lema 11.3 (Propiedad cancelativa de + con <, 2.8)**.** *Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \iff a + c < b + c$.*

Demostración. La implicación ($\Rightarrow$) es el enunciado de P12(+) (Monotonía de la suma). Para ver ($\Leftarrow$), supongamos que $a + c < b + c$. Por P12(+), podemos sumar a ambos lados $-c$ y concluimos $(a + c) + (-c) < (b + c) + (-c)$. A partir de esto deducimos:

$$
\begin{aligned}
(a + c) + (-c) < (b + c) + (-c) &\iff a + (c + (-c)) < b + (c + (-c)) && \text{Asociativa (+),}\\
&\iff a + 0 < b + 0 && \text{Opuesto,}\\
&\iff a < b && \text{Neutro (+)}
\end{aligned}
$$
∎

Lema 11.4 (Orden y Positividad, 2.13)**.** *Para todos los reales r y s, se da $r < s \iff 0 < s - r$.*

Demostración. Es una conclusión fácil de la propiedad cancelativa entre + y <:

$$
\begin{aligned}
r < s &\iff r + (-r) < s + (-r) && \text{Lema 2.8,}\\
&\iff 0 < s + (-r) && \text{Opuesto,}\\
&\iff 0 < s - r && \text{Definición de } -.
\end{aligned}
$$
∎

Lema 11.5 (Signo del opuesto, 2.14)**.** 1. $a < 0 \iff 0 < -a$.

2. $a > 0 \iff 0 > -a$.

Demostración. Para el primer ítem, consideremos el Lema 2.8 para el caso $b = 0$ y $c = -a$:

$$a < 0 \iff a + (-a) < 0 + (-a).$$

Aplicando Opuesto en el lado izquierdo y Neutro (+) en el derecho, obtenemos la conclusión.

El segundo ítem queda como ejercicio. ∎

11.3. Funciones como relaciones

Consideremos los ejemplos de *relaciones*[10] de la Tabla 5. A la derecha de cada uno de ellos, leemos si son verdaderos (**V**), falsos (**F**), o si acaso no están definidos (**X**).

Definición 11.6. Una relación f es una ***función*** si se cumple que

$$\forall x, z, w,\ x \overset{f}{\longmapsto} z \land x \overset{f}{\longmapsto} w \implies z = w. \tag{11.1}$$

Nombre	En general	“Regla de asociación”	Ejemplos	
“$\leq$”	$x \leq z$	$x < z \vee x = z$	$2 \leq 2$	**V**
			$2 \leq 3$	**V**
			$3 \leq 2$	**F**
“F”	$x \overset{F}{\longmapsto} z$	$z = 2 \cdot x + 5$	$0 \overset{F}{\longmapsto} 5$	**V**
			$0 \overset{F}{\longmapsto} 6$	**F**
			$1 \overset{F}{\longmapsto} 7$	**V**
“H”	$x \overset{H}{\longmapsto} z$	$z = x^{-1}$	$2 \overset{H}{\longmapsto} \frac{1}{2}$	**V**
			$\frac{1}{2} \overset{H}{\longmapsto} 2$	**V**
			$0 \overset{H}{\longmapsto} 2$	**X**
“G”	$x \overset{G}{\longmapsto} z$	$z^2 = x$	$4 \overset{H}{\longmapsto} 2$	**V**
			$4 \overset{H}{\longmapsto} -2$	**V**
			$-4 \overset{H}{\longmapsto} z$	**X**
“S”	$x \overset{S}{\longmapsto} z$	$z^2 = x \wedge z \geq 0$	$4 \overset{H}{\longmapsto} 2$	**V**
			$4 \overset{H}{\longmapsto} -2$	**F**
			$-4 \overset{H}{\longmapsto} z$	**X**

Tabla 5: Ejemplos de relaciones y funciones.

Es decir, usando la contrarrecíproca, que “no hay x al que f le asocie dos z”.

Lema 11.7. *Si la definición de la relación $x \overset{f}{\longmapsto} z$ es de la forma $z = E$ (donde la expresión E puede involucrar a x pero no a z), entonces es una función.*

Más en general, si $x \overset{f}{\longmapsto} z \implies z = E$ (con E como antes), entonces es una función.

Demostración. Probaremos la segunda afirmación, que de hecho implica la primera. Supongamos que $x \overset{f}{\longmapsto} z$ y que $x \overset{f}{\longmapsto} w$. Por hipótesis, de $x \overset{f}{\longmapsto} z$ concluimos $z = E$ y de $x \overset{f}{\longmapsto} w$, $w = E$. Por simetría y transitividad de la igualdad, obtenemos $z = w$, que era lo que queríamos. ⌸

Ejemplo 11.8. Usando el Lema anterior, podemos concluir rápidamente que las relaciones F, H y S de la Tabla 5 son funciones, mientras que las relaciones $\leq$ y G no lo son; figuran allí respectivos valores de x (2 y 4) a los que les corresponden más de un z por la relación.

Ejemplo 11.9 (Función identidad)**.** La función más aburrida del mundo (quizá después de una constante) es la función ***identidad***, I, con regla de asociación

$$x \overset{I}{\longmapsto} z \iff z = x.$$

Es decir, a cada x le asocia él mismo.

Definición 11.10. El ***dominio*** de una función f viene dado por la siguiente equivalencia:

$$x \in \operatorname{Dom} f \iff \exists z,\ x \overset{f}{\longmapsto} z. \tag{11.2}$$

Si f es función y $x \in \operatorname{Dom} f$, **existe un único** z tal que $x \overset{f}{\mapsto} z$.

Definición 11.11. Sea f una función y $x \in \operatorname{Dom} f$. El ***valor de*** f ***en*** x, denotado por $f(x)$ (léase: "f de x"), es el único z tal que $x \overset{f}{\mapsto} z$.

Decimos que $f(x)$ es el resultado de ***evaluar*** f ***en*** el ***argumento*** x (o también ***aplicar*** f ***a*** x.

En conclusión, tenemos

$$f(x) \text{ definido} \iff f \text{ función} \wedge x \in \operatorname{Dom} f. \tag{11.3}$$

Ejemplo 11.12.

1. Sea F la función de la Tabla 5. Tenemos entonces $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R}$. En este caso, escribimos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde el segundo "$\mathbb{R}$" es el *conjunto de llegada*.

2. Sea $x \overset{\bar{F}}{\mapsto} z$ con regla de asociación

$$z = 2 \cdot x + 5 \wedge x \in [0, 1].$$

Se puede ver que es una función. Si bien la "fórmula" que define a $\bar{F}$ es "la misma" que la de F, resulta que $\operatorname{Dom} \bar{F} = [0, 1]$. En este caso, escribimos $\bar{F} : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

En el segundo ejemplo, $\bar{F}$ se obtiene *restringiendo* F al conjunto $[0, 1]$. Además, decimos que el conjunto de llegada de $\bar{F}$ también es $\mathbb{R}$, por la mera razón de que todos sus valores son reales; pero no todos los reales son valores de $\bar{F}$. El conjunto de los valores de una función viene dado por la siguiente

Definición 11.13. La ***imagen*** de f, $\operatorname{Im} f$, viene dada por la siguiente equivalencia:

$$z \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ x \overset{f}{\mapsto} z. \tag{11.4}$$

Para funciones, la caracterización de la imagen que más se usa es la siguiente:

Lema 11.14. *Si f es una función entonces* $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$.

La operación de composición puede definirse para relaciones arbitrarias, como sigue.

Definición 11.15. La ***composición*** de f con g, denotada por $f \circ g$, viene dada por:

$$x \overset{f \circ g}{\longmapsto} z \iff \exists u,\ x \overset{g}{\mapsto} u \wedge u \overset{f}{\mapsto} z. \tag{11.5}$$

Tenemos entonces:

Lema 11.16. *Supongamos que f y g son funciones. Entonces*:

1. *$f \circ g$ es una función.*

2. *Para todo x,* $x \in \operatorname{Dom}(f \circ g) \iff x \in \operatorname{Dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{Dom} f$.

3. *Si* $x \in \operatorname{Dom} f \circ g$, *entonces* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. ⊞

Demostración. Probaremos el primer ítem, pero durante su prueba obtendremos la justificación de los otros dos.

Supongamos que $x \xmapsto{f\circ g} z$ y $x \xmapsto{f\circ g} w$. Por definición de composición debe haber u_1, u_2 que satisfagan

$$x \xmapsto{g} u_1 \wedge u_1 \xmapsto{f} z, \tag{11.6}$$

$$x \xmapsto{g} u_2 \wedge u_2 \xmapsto{f} w. \tag{11.7}$$

De cualquiera de las fórmulas se deduce que $x \in \operatorname{Dom} g$, y como g es función, debe ser $u_1 = u_2 = g(x)$. (Este mismo razonamiento justifica que $x \in \operatorname{Dom}(f \circ g) \implies x \in \operatorname{Dom} g$). Entonces obtenemos, reemplazando u_1 y u_2 ambas fórmulas,

$$g(x) \xmapsto{f} z \text{ y } g(x) \xmapsto{f} w.$$

Ahora, esto implica que $g(x)$ debe estar en $\operatorname{Dom} f$ (con lo cual hemos demostrado ($\Rightarrow$) del segundo ítem), y por ser f una función, debe ser $z = w$ (que concluye el primer ítem) y a su vez iguales a $f(g(x))$ (con lo cual tenemos el tercer ítem).

Lo único que falta ver es ($\Leftarrow$) del segundo ítem. Es decir, hace falta ver que si $x \in \operatorname{Dom} g \wedge g(x) \in \operatorname{Dom} f$, entonces

$$\exists z,\ x \xmapsto{f\circ g} z.$$

Expandiendo la definición,

$$\exists z, u,\ x \xmapsto{g} u \wedge u \xmapsto{f} z,$$

y es inmediato (igual que arriba) que si tomamos $u := g(x)$ y $z := f(g(x))$ (que están definidos por hipótesis), se satisface lo de adentro. ⊥

La caracterización dada por el Ítem 3 es la que se usará siempre.

Por último, definamos una última operación sobre una relación, que esencialmente corresponde a "darla vuelta".

Definición 11.17. La ***inversa*** de f, denotada por f^{-1}, viene dada por:

$$x \xmapsto{f^{-1}} z \iff z \xmapsto{f} x. \tag{11.8}$$

Supongamos que f es una función ¿Cuándo es una función f^{-1}? Usando la Definición 11.6, necesitamos que para todos los x, z, w, se dé.

$$x \xmapsto{f^{-1}} z \wedge x \xmapsto{f^{-1}} w \implies z = w,$$

es decir,

$$z \xmapsto{f} x \wedge w \xmapsto{f} x \implies z = w. \tag{11.9}$$

No todas las funciones cumplen con lo anterior, pero es un concepto que ya conocen desde antes.

Definición 11.18. Una función f se dice ***inyectiva*** o ***uno a uno*** (escrito "***1-1***") si satisface la Ecuación 11.9. Equivalentemente, para todos los x, y en $\operatorname{Dom} f$, se da

$$f(x) = f(y) \implies x = y. \tag{11.10}$$

La formulación (11.10) es la que se usará siempre.

Lema 11.19. *Sea f una función inyectiva. Luego f^{-1} es una función.*

Obtenemos también:

Lema 11.20. *El dominio de la inversa de f coincide con su imagen*: $x \in \operatorname{Dom} f^{-1} \iff x \in \operatorname{Im} f$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Dom} f^{-1} &\iff \exists z,\ x \xmapsto{f^{-1}} z && \text{Def. de Dom,}\\
&\iff \exists z,\ z \xmapsto{f} x && \text{Def. de inversa,}\\
&\iff x \in \operatorname{Im} f && \text{Def. de imagen.}
\end{aligned}$$

Teorema 11.21. *Sea f una función inyectiva. Entonces*:

1. *Si $x \in \operatorname{Im} f$, entonces $f(f^{-1}(x)) = x$.*
2. *Si $x \in \operatorname{Dom} f$, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.*

Demostración. Para el primer ítem, observamos que si $x \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Dom} f^{-1}$, entonces tenemos $x \xmapsto{f^{-1}} f^{-1}(x)$ por la Definición 11.11 de evaluación. Por definición de inversa, tenemos $f^{-1}(x) \xmapsto{f} x$, y nuevamente por definición de evaluación, tenemos $f(f^{-1}(x)) = x$.

El segundo ítem es muy similar.

Ejercicio 11.22. ¿Dónde se usa que f es inyectiva?

Ejercicio 11.23. Probar el segundo ítem del Teorema 11.21.

Agradecimientos

Agradezco a Carina Boyallian por las discusiones durante el dictado 2023, y especialmente por su infinita buena disposición para con mis propuestas. Durante años anteriores, me beneficié por charlas con Leandro Cagliero, Guillermo Flores y Pablo Román (con quien tengo el gusto de dar esta materia en 2024). Finalmente, agradezco cálidamente a Juan Alfredo Tirao, con quien yo cursé Análisis I y cuyas notas también he revisado para dar mis clases.

12. Notas

1. Hay situaciones particulares donde conviene asignar un valor "basura" a las expresiones no definidas. Por ejemplo, definir $0^{-1} := 0$ (ó 42, o lo que fuere). De todos modos, uno debe seguir evitando usar la expresión problemática para no meter la pata.

2. En general, se dice que los teoremas tienen cero o más *hipótesis* (las suposiciones) y una ***tesis***, que viene a ser la conclusión.

3. La frase ***sin pérdida de generalidad*** significa que se puede agregar una hipótesis al teorema que se quiere demostrar y que esencialmente la misma prueba se puede usar para probar el caso que falta.

En la prueba de la desigualdad triangular se ve un ejemplo concreto. Una versión abstracta de ese ejemplo sería la siguiente. Si queremos probar la propiedad $P(a,b)$ para todos los $a,b \in \mathbb{R}$, y además se sabe que $P(a,b) \iff P(b,a)$, es suficiente probar la implicación $a \leq b \implies P(a,b)$ para todos $a,b \in \mathbb{R}$.

4. Más precisamente, un subconjunto de $\mathbb{R}$ es ***discreto*** si para cada punto hay un intervalo abierto (suficientemente chico) en el que sólo está ese punto del conjunto.

Si se intenta formalizar la noción de que "todos los elementos estén separados" pidiendo que entre dos elementos cualesquiera del conjunto haya un intervalo libre de puntos del conjunto, obtendremos una noción muy diferente. Tanto, que hay conjuntos —como el de Cantor— que tienen sus puntos "separados dos a dos" en este sentido pero ninguno de sus puntos está "aislado" en el sentido del párrafo anterior.

5. Las leyes lógicas que justifican este paso de demostración son atribuidas a De Morgan y llevan su nombre:

- $\neg(\forall x,\ P(x)) \iff \exists x,\ \neg P(x)$;
- $\neg(\exists x,\ P(x)) \iff \forall x,\ \neg P(x)$;
- $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$;
- $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

En particular, aplicando repetidas veces la primera y la segunda se obtiene lo que queríamos.

Es notorio, sin embargo, que sólo se pueden aplicar un número *finito* de veces: no es siempre cierto que

$$\neg\big(\forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, \exists x_4, \forall x_5, \dots, P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots)\big)$$

sea equivalente a

$$\exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, \forall x_4, \exists x_5, \dots, \neg P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots).$$

6. En general es cierto que si $P(n) \implies Q(n)$, entonces podemos concluir

$$\big(\forall n,\ P(n)\big) \implies \big(\forall n,\ Q(n)\big),$$

y lo mismo ocurre con $\exists$. Sin embargo, hay que tener cuidado porque hay algunos contextos donde se *invierte* la dirección, y otros donde no se puede decidir a priori.

Por ejemplo, si $P \implies Q$ entonces se puede concluir:

- $P \vee R \implies Q \vee R$;
- $P \wedge R \implies Q \wedge R$;
- $(R \implies P) \implies (R \implies Q)$;

pero

- $\neg P \Longleftarrow \neg Q$:
- $(P \implies R) \Longleftarrow (Q \implies R)$;

y en general no al revés.

7. De hecho, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier función sobreyectiva, se da la siguiente equivalencia:

$$\forall r,\ P(r) \iff \forall r,\ P(f(r)).$$

Y muchísimo más general aún, para cualesquiera conjuntos X y Z, y $f : X \to Z$ suryectiva, se da:

$$\forall z \in Z,\ P(z) \iff \forall x \in X,\ P(f(x));$$

8. Esta frase latina significa "que era lo que se quería demostrar", y aparece muchas veces con sus iniciales ***QED***. En este caso es ligeramente redundante, puesto que el símbolo "$\square$" al final de las demostraciones significa exactamente eso (representado en este apunte con la variante "$\boxplus$").

9. ¡Insisto porque a mí me pasó! Un ejemplo de función que cumple $\mathrm{Conv}(f, a, b)$ y no es convexa en (a, b) es el polinomio cuártico $f(x) := (x + 1)x(x - 1)(x - 2)$. Éste tiene 4 raíces y es fácil ver que entre las dos del medio (0 y 1) es cóncava.

Como ayuda-memoria, recordar que la frase que usamos es "f es convexa en I" y **no** "f es convexa en (a, b)".

10. Por conveniencia didáctica, estamos dejando el concepto de "relación" indefinido. Sin embargo, una ***relación binaria*** se puede definir como cualquier conjunto de pares ordenados, y luego se puede definir función como cierto tipo de relación (así lo hace Spivak [3, p. 60]). De hecho, también se pueden definir los pares ordenados como conjuntos (!) [3, p. 69], y los conjuntos. . . eso ya no se puede definir, sino *axiomatizar*, como hicimos con los números reales.

Referencias

[1] P. Kisbye, et al., "Ingreso a Famaf: materiales de estudio", FaMAF (2017).

[2] M. Spivak, "Calculus", W.A. Benjamin Inc, New York, NY, USA (1994), segunda edición.

[3] M. Spivak, "Cálculo infinitesimal", Editorial Reverté S.A., Barcelona, España (1996), segunda edición.

A. Otros resultados sobre funciones continuas

A.1. Los Teoremas Fuertes, afinados

En esta sección, modificaremos la definición de continuidad en un conjunto para el caso de un intervalo cerrado, de manera que no sea necesario que la función en cuestión esté definida en un entorno de los extremos.

Definición A.1 (Continuidad en un cerrado)**.** Decimos que f es ***continua en*** $[a, b]$ si f es continua en (a, b) y además es continua por derecha en a y por izquierda en b; es decir, que además cumple $\lim_{x\searrow a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\nearrow b} f(x) = f(b)$.

Como dijimos en la Sección 8.3, la definición anterior es más laxa, de manera que más funciones son continuas en $[a, b]$ que según la Definición 8.10:

Proposición A.2. *Si f es continua en x para todo $x \in [a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$, pero no vale la recíproca.* ⊞

A continación, dejamos pruebas de los dos primeros Teoremas fuertes donde se usa la nueva definición de "ser continua en $[a, b]$". Los demas resultados son igualmente válidos, y se prueban exactamente igual. Al ser la nueva Definición A.1 *más débil* que la que usamos con anterioridad, los resultados que la usan en sus hipótesis serán *más fuertes* que los probados en la Sección 8.3.

Teorema A.3 (Primer Teorema Fuerte — Bolzano)**.** *Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces existe $r \in (a, b)$ tal que $f(r) = 0$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A := \{x \in [a, b] \mid \forall y \in [a, x),\ f(y) < 0\}. \tag{A.1}$$

Este conjunto está incluido en $[a, b]$, y por lo tanto está acotado por b. Además es no vacío, pues $a \in A$ (vacuamente[11], puesto que $[a, a) = \varnothing$). Luego, A debe tener un supremo r, que por ser (la menor) cota superior debe ser mayor o igual que a (menor o igual que b). Comencemos observando que $a < r < b$: para la primera desigualdad, notemos que por el Lema 7.17 y la Definición A.1, debe existir un $\delta > 0$ tal que f es negativa en $[a, a + \delta)$. Luego $a + \delta \in A$ (ver (A.1)) y luego $a + \delta \leq r$ por ser cota. Similarmente se puede probar la segunda desigualdad.

A continuación probaremos que $f(r) = 0$. Para ello, supondremos alternativamente que $f(r) < 0$ y $f(r) > 0$ llegando a respectivos absurdos.

$\boxed{\text{Caso } f(r) < 0.}$ Como $r \in (a, b)$, f es continua en r y luego debe existir un $\delta > 0$ tal que f es negativa en $(r - \delta, r + \delta)$ por el Lema 8.5.

Observemos ahora que como $r - \delta < r$, no puede ser cota superior de A (por definición de supremo). Luego, debe haber un $y \in A$ tal que $y \nleq r - \delta$, esto es, $r - \delta < y$. Por estar y en A, que f es negativa en el intervalo $[a, y)$.

Luego f es negativa tanto en $[a, y)$ como en $(r - \delta, r + \delta)$ así que f es negativa en todo $[a, r + \delta)$ (puesto que estos dos intervalos se intersecan al ser $r - \delta < y$). Luego $r + \delta$ está en A. Esto es un absurdo puesto que r era cota de A.

$\boxed{\text{Caso } f(r) > 0.}$ Es similar al caso anterior. Como f es continua en r, f debe ser positiva en algún entorno $(r - \delta, r + \delta)$ de r. Luego ningún $x > r - \delta$ puede estar en A (puesto que para cualquier $y \in (r - \delta, x) \subseteq [a, x)$, refuta el predicado que lo define). Entonces $r - \delta$ es cota superior de A, lo que contradice que r era la menor.

Estas dos contradicciones eliminan los dos casos, así que no queda otra opción que $f(r) = 0$. ⊞

Teorema A.4 (Segundo Teorema Fuerte)**.** *Supongamos que f es continua en $[a, b]$. Entonces f es acotada superiormente.*

Demostración. Es muy similar a la del Teorema de Bolzano. Definamos en este caso

$$A := \{x \in [a, b] \mid f \text{ es acotada superiormente en } [a, x)\}. \tag{A.2}$$

El extremo izquierdo a está en A, puesto que f está acotada (por cualquier número) en $[a, a) = \emptyset$. Primero mostraremos que $b = \sup A$ (que existe por ser éste no vacío y acotado por b).

Por definición de supremo, basta ver que ningún número menor que b puede ser cota de A. En primer lugar, $a \neq \sup A$ puesto que por Definición A.1 y el Lema 7.15, f está acotada en $[a, a+\delta)$ para algún $\delta > 0$. Luego $a + \delta \in A$ y entonces $a < \sup A$.

Si acaso fuera $\sup A < b$, entonces f sería continua en $\sup A$. Por lo tanto, f estaría acotada en $(\sup A - \eta, \sup A + \eta)$ para algún $\eta > 0$. Como en la prueba del Primer Teorema Fuerte, debe haber algún $y \in A$ tal que $\sup A - \eta < y$; luego f será acotada tanto en $[a, y)$ como en $(\sup A - \eta, \sup A + \eta)$; luego es acotada en $[a, \sup A + \eta)$. Esto significa que $\sup A + \eta \in A$, lo que contradice que $\sup A$ es cota de A. Esto significa que $\sup A = b$.

Aplicando nuevamente la Definición A.1 y el Lema 7.15, f está acotada en $(b - \delta, b]$ para algún $\delta > 0$. Como $b - \delta < \sup A$, debe haber algún elemento y de A mayor a $b - \delta$. Luego f es acotada tanto en $[a, y)$ como en $(b - \delta, b]$, y como en el párrafo anterior, f resulta acotada en $[a, b]$. ⊔⊓

Index

Los términos simbólicos deben buscarse como si se los leyera en voz alta. Por ejemplo, f^{-1} aparece donde estaría “f menos uno”.