Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Laura Martín Agustín Luciana José Luis
Romina

FaMAF, 6 de mayo de 2024

Universidad Nacional de Córdoba
UNC
1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Otras formas de límite
   - Límites usuales y límites laterales
   - Límite (al) infinito
   - Ejemplos
2. Límites notables
   - Límites notables trigonométricos
3. Funciones continuas
   - Definición y ejemplos
   - Propiedades locales
   - Aritmética
4. Conclusión

Límites usuales y límites laterales

- **Límite usual.** $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Límites usuales y límites laterales

- **Límite usual.** $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- **Límite lateral por izquierda.** $\lim_{x\nearrow a} f(x) = l$ $\quad (\lim_{x\to a^-} f(x) = l)$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ a-\delta < x < a \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Límites usuales y límites laterales

- **Límite usual.** $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$

- **Límite lateral por izquierda.** $\lim_{x\nearrow a} f(x) = l$ $\quad(\lim_{x\to a^-} f(x) = l)$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a-\delta < x < a \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$

- **Límite lateral por derecha.** $\lim_{x\searrow a} f(x) = l$ $\quad(\lim_{x\to a^+} f(x) = l)$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a+\delta \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Límite (al) infinito

Límite (al) infinito

- **Límite infinito.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
  $\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies M < f(x).$

Límite (al) infinito

- **Límite infinito.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Límite (al) infinito

- **Límite infinito.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Límite (al) infinito

- **Límite infinito.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite infinito cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall M,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies M < f(x).$$

Límite (al) infinito

- **Límite infinito**. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a ∞**. Igual que sucesiones:
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$**.
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite infinito cuando x tiende a ∞**. Igual que sucesiones:
$$\forall M,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies M < f(x).$$
- **Todas las demás combinaciones**. Ver en el apunte.

Límite (al) infinito

- **Límite infinito.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
- **Límite infinito cuando x tiende a ∞.** Igual que sucesiones:
$$\forall M,\ \exists N,\ \forall x,\ N < x \implies M < f(x).$$
- **Todas las demás combinaciones.** Ver en el apunte.

Las definiciones con $+\infty$ son equivalentes si se pide que M, N sean mayores que 0; las de $-\infty$, con $M, N < 0$.

Ejemplos

- **Límite lateral infinito.** $\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a+\delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N < 0,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ejemplos

- **Límite lateral infinito.** $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a + \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N < 0,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Acá vamos a usar que vale lo mismo si ponemos $M > 0$.

Ejemplos

- **Límite lateral infinito.** $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty \iff$
$$\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ a < x < a + \delta \implies M < f(x).$$
- **Límite cuando x tiende a $-\infty$.**
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N < 0,\ \forall x,\ x < N \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Acá vamos a usar que vale lo mismo si ponemos $M > 0$.

La función “recíproco”

1. $\displaystyle \lim_{x \searrow a} \frac{1}{x} = \infty.$
2. $\displaystyle \lim_{x \searrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Repaso

Material del cursillo [1], Secciones 5.1 a 5.3 (pp. 163–171).

- $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.
- Notación: $\operatorname{sen}^n(x) := (\operatorname{sen}(x))^n$.
- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

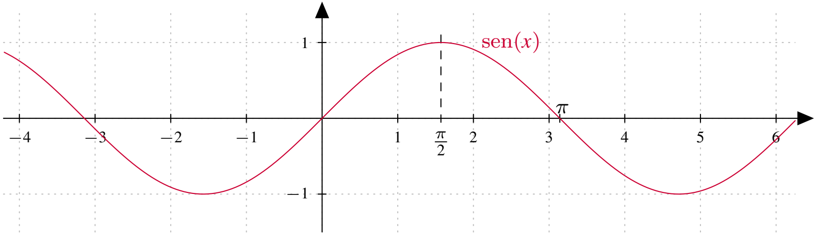
Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tan: \mathbb{R} \setminus \{\dots\} \to \mathbb{R}.$$

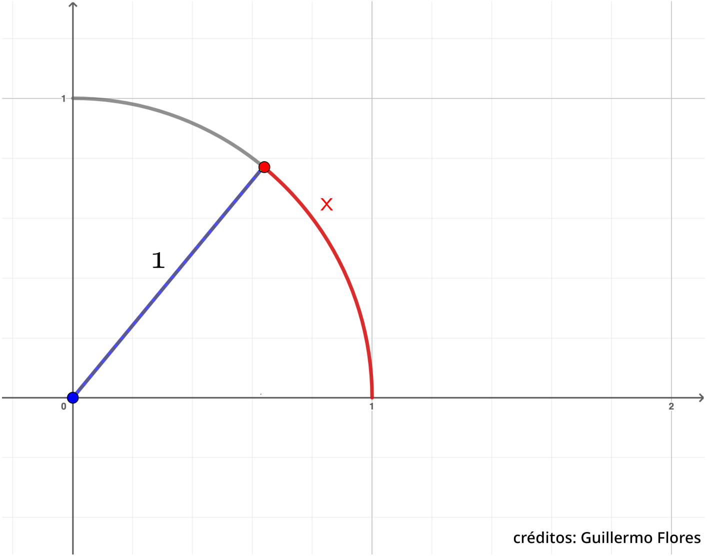
UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Funciones trigonométricas

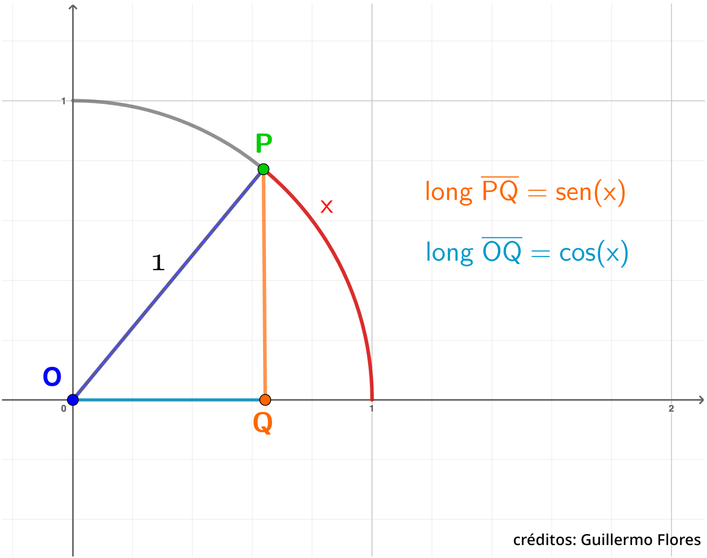
$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tan : \mathbb{R} \setminus \{\dots\} \to \mathbb{R}.$$



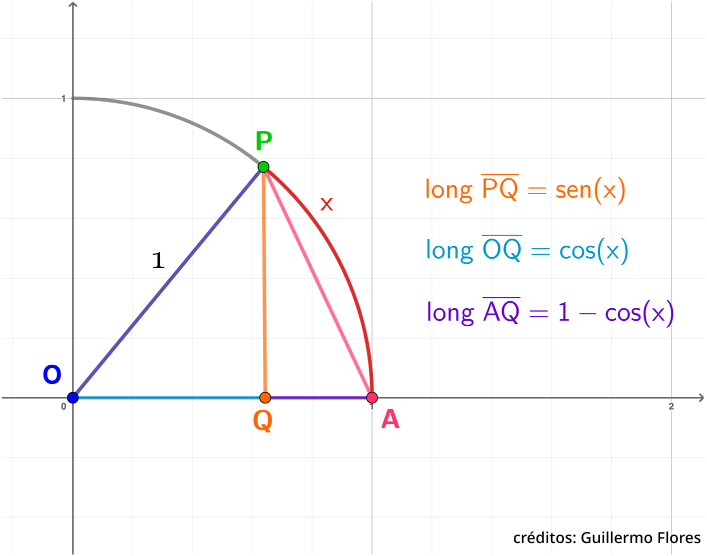
Límites notables trigonométricos



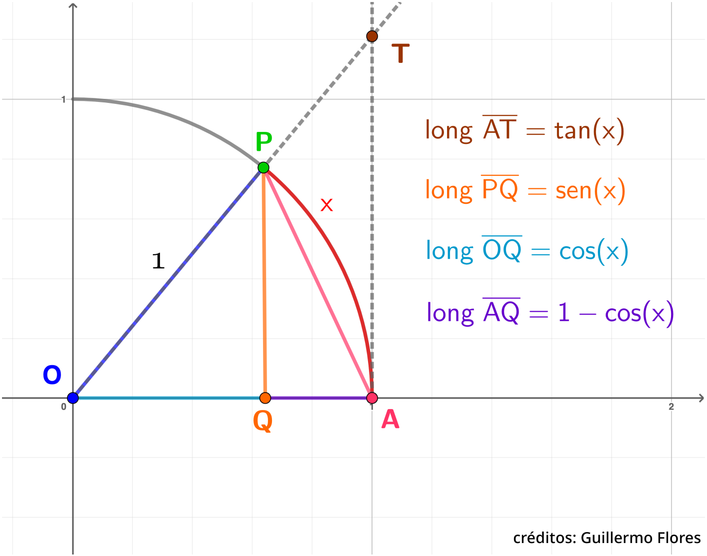
Límites notables trigonométricos



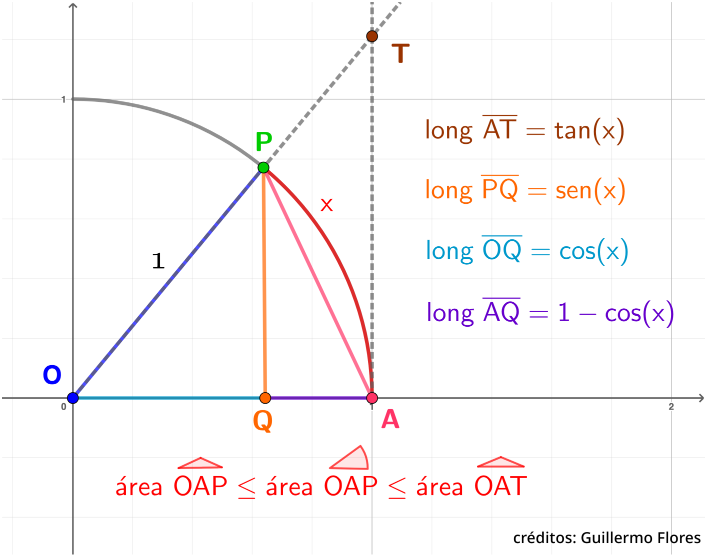
Límites notables trigonométricos



Límites notables trigonométricos



Límites notables trigonométricos



Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.
3. $0 \leq 1 - \cos x \leq \overline{\mathsf{AP}} \leq x$.

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.
3. $0 \leq 1 - \cos x \leq \overline{\mathsf{AP}} \leq x$.

Límites básicos

- $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.
3. $0 \leq 1 - \cos x \leq \overline{\mathsf{AP}} \leq x$.

Límites básicos

- $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{sen} x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.
3. $0 \leq 1 - \cos x \leq \overline{\mathsf{AP}} \leq x$.

Límites básicos

- $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sen} x = 0$.
- $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.
- $\lim_{x \searrow 0} 1 - \cos x = 0$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $0 \leq \operatorname{sen} x$.
3. $0 \leq 1 - \cos x \leq \overline{\mathsf{AP}} \leq x$.

Límites básicos

- $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{sen} x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.
- $\lim\limits_{x \searrow 0} 1 - \cos x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \cos x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $x \cdot \cos x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $x \cdot \cos x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.

Límites copados

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $x \cdot \cos x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.

Límites copados

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 0.$

Límites notables trigonométricos

1. $\operatorname{sen} x \leq x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
2. $x \cdot \cos x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.

Límites copados

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 0$.
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funciones continuas

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Funciones continuas

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ejemplo

- Funciones constantes (P4E4a).;

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Equivalentemente

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

Ejemplo

- Funciones constantes (P4E4a).;
- identidad (P4E4a);

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ejemplo

- Funciones constantes (P4E4a).;
- identidad (P4E4a);
- $f(x) := x^2$ (P4E4c).

Funciones continuas

Definición

f es **continua en** a si y sólo si

1. f está definida en un entorno de a y
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ejemplo

- Funciones constantes (P4E4a).;
- identidad (P4E4a);
- $f(x) := x^2$ (P4E4c).
- $f(x) := \sqrt{x}$ (P4E4d).

Propiedades locales

Lema (Preservación de signo)

Si f es continua en a y $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), entonces f es mayor (menor) que 0 en un entorno de a.

Propiedades locales

Lema (Preservación de signo)

Si f es continua en a y $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), entonces f es mayor (menor) que 0 en un entorno de a.

Lema (Acotación local)

Si f es continua en a entonces f está acotada en un entorno de a.

Igual que los límites,

Teorema

Las funciones continuas son cerradas por suma, producto y cociente.

Aritmética de las funciones continuas

Igual que los límites,

Teorema

Las funciones continuas son cerradas por suma, producto y cociente.

Ejemplo

- funciones polinómicas;

Aritmética de las funciones continuas

Igual que los límites,

Teorema

Las funciones continuas son cerradas por suma, producto y cociente.

Ejemplo

- funciones polinómicas;
- funciones **racionales**: cocientes de polinomios, en su dominio

Igual que los límites,

Teorema

Las funciones continuas son cerradas por suma, producto y cociente.

Ejemplo

- funciones polinómicas;
- funciones **racionales**: cocientes de polinomios, en su dominio

Teorema (Clausura por composición)

Si $f : X \to Y$ es continua en a y $g : Y \to Z$ es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua en a.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden trabajar hasta el final del P4.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden trabajar hasta el final del P4.

Lectura para la próxima clase

- Teoremas Fuertes, (Apunte, Sección 8.3, páginas 47–48).

Bibliografía

[1] P. KISBYE, ET AL., "Ingreso a Famaf: materiales de estudio", FaMAF (2017).

[2] M. SPIVAK, "Cálculo infinitesimal", Editorial Reverté S.A., Barcelona, España (1996), segunda edición.