Me acusan que soy vago,
que el trabajo me asusta,
yo sufro por mi vocación
solo pensar me gusta.

Y paso el día entero,
arreglando problemas,
pero me mata la humildad
nunca nadie se entera.

La pucha con mi oficio,
anónimo y callado,
de a ratos me da por pensar
que es un apostolado.
Tal vez cuando me entiendan,
ya sea un poco tarde,
pero los pienso perdonar
soy hombre razonable!

Bien tempranito arranco,
desde mi catre viejo,
dale que dale sin parar
meta pensar Canejo!

La siesta me relaja,
tensiones que contraigo,
la vida del intelectual
tiene un sabor amargo.

Si soy incomprendido
yo sufro por mi ciencia,
en el pecado de pensar
está mi penitencia.
Más tarde o más temprano,
me volveré famoso,
porque soy el gran pensador
del pago de Habrapozo! [2005]

Congruencias Factor Definibles

Pedro Sánchez Terraf
Director: Diego J. Vaggione

30 de marzo de 2007 (dos días tarde)

Esta Tesis. . .

Abstract

Esta Tesis. . .

Abstract

Teorema Principal (TP).

Esta Tesis. . .

Abstract

Teorema Principal (TP). $DP \Leftrightarrow DFC \Leftrightarrow BFC$

Esta Tesis. . .

Abstract

Teorema Principal (TP). $DP \Leftrightarrow DFC \Leftrightarrow BFC$
Q.E.D.

Resumen (ahora va en serio)

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 6 \times 35 = 10 \times 21$$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 35 = 10 \times 21$$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 10 \times 21$$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 21$$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 3 \times 7$$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 3 \times 7$$

$$A \cong B_1 \times B_2 \cong C_1 \times C_2$$

$\Rightarrow$ existen D_{ij} tales que

$$B_i \cong D_{i1} \times D_{i2} \quad \text{y} \quad C_i \cong D_{1i} \times D_{2i}$$

con $i = 1, 2$

La Propiedad de Refinamiento

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 3 \times 7$$

$$A \cong B_1 \times B_2 \cong C_1 \times C_2$$

$\Rightarrow$ existen D_{ij} tales que

$$B_i \cong D_{i1} \times D_{i2} \quad \text{y} \quad C_i \cong D_{1i} \times D_{2i}$$

con $i = 1, 2$

Refinamiento Estricto (SRP)

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dlll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[drrr, "p_2"] & & & \\
B_1 & \times & B_2 & & C_1 & \times & C_2
\end{tikzcd}$$

Refinamiento Estricto (SRP)

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dlll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[drrr, "p_2"] & & & \\
B_1 \arrow[dr, "b_{11}"] \arrow[ddr, "b_{12}"'] & \times & B_2 \arrow[drrr, "b_{21}"] \arrow[ddrrr, "b_{22}"'] & & C_1 \arrow[dlll, "c_{11}"'] \arrow[dr, "c_{21}"] & \times & C_2 \arrow[ddlllll, "c_{12}"'] \arrow[ddl, "c_{22}"] \\
 & D_{11} & & & & D_{21} & \\
 & D_{12} & & & & D_{22} &
\end{tikzcd}
$$

$$b_{11} \circ \pi_1 = c_{11} \circ p_1$$
$$b_{21} \circ \pi_2 = c_{21} \circ p_1$$
$$b_{12} \circ \pi_1 = c_{12} \circ p_1$$
$$\cdots$$

Refinamiento Estricto (SRP)

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dl, shift left=2, "\pi_2"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[dr, shift left=2, "p_2"] & \\
B_1 \times B_2 \arrow[d, "b_{11}"] \arrow[dd, bend right, "b_{12}"'] \arrow[drr, "b_{21}"] \arrow[ddrr, "b_{22}"] & & C_1 \times C_2 \arrow[dll, "c_{11}"'] \arrow[d, "c_{21}"] \arrow[ddll, "c_{12}"] \arrow[dd, bend left, "c_{22}"] \\
D_{11} & & D_{21} \\
D_{12} & & D_{22}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{11} \circ \pi_1 &= c_{11} \circ p_1 \\
b_{21} \circ \pi_2 &= c_{21} \circ p_1 \\
b_{12} \circ \pi_1 &= c_{12} \circ p_1 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Congruencias Factor Booleanas (BFC)

Dado un anillo A, el conjunto

$$FC(A) := \{I \text{ ideal de } A | \ \exists J : I + J = \langle 1 \rangle \text{ y } I \cap J = 0\}$$

Congruencias Factor Booleanas (BFC)

Dado un anillo A, el conjunto

$$FC(A) := \{I \text{ ideal de } A |\ \exists J : I + J = \langle 1 \rangle \text{ y } I \cap J = 0\}$$

es un Álgebra de Boole con las operaciones $+$ y $\cap$.

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ B & \times & C \end{tikzcd}$$

- $x - y \in \ker \pi_1$
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C)$

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ {\scriptstyle\pi_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\pi_2} \\ B & \times & C \end{array}$$

¿$\pi_1(x) = \pi_1(y)$?

- $x - y \in \ker \pi_1$
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C)$

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
B & \times & C
\end{tikzcd}
$$

¿$\pi_1(x) = \pi_1(y)$?

¡Obvio!:

- $x - y \in \ker \pi_1$
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C)$

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
B & \times & C
\end{tikzcd}
$$

¿$\pi_1(x) = \pi_1(y)$?

¡Obvio!:

- $x - y \in \ker \pi_1$
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C)$

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & \times & C \end{array}$$

¿$\pi_1(x) = \pi_1(y)$?

¡Obvio!:

- $x - y \in \ker \pi_1 \rightsquigarrow$ congruencias (factor)
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C)$

Elementos Centrales y Congruencias Factor

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ {\scriptstyle \pi_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi_2} \\ B & \times & C \end{array}$$

¿$\pi_1(x) = \pi_1(y)$?

¡Obvio!:

- $x - y \in \ker \pi_1 \rightsquigarrow$ congruencias (factor)
- $x \cdot e = y \cdot e$, con $e = (1^B, 0^C) \rightsquigarrow$ 0 & 1, λ-centrales

La Propiedad de Determinación (DP)

Los elementos centrales determinan las descomposiciones en producto directo:

$$Z \longmapsto FC(A)^2$$
$$e \longmapsto \langle I, J \rangle$$

tal que $e + I = 1 + I$ y $e + J = J$ es una biyección.

Congruencias Factor Definibles (DFC)

$$\Phi(x, y, z) \longleftrightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

Existe una fórmula de primer orden $\Phi(x, y, z)$ tal que

$$B \times C \models \Phi(\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle 1, 0\rangle)$$

si y sólo si

$$a = c.$$

para todo $B, C \in \mathcal{V}$, y $a, c \in B$, $b, d \in C$.

Congruencias Factor Definibles (DFC)

$$\Phi(x, y, z) \longleftrightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

Existe una fórmula de primer orden $\Phi(x, y, z)$ *tal que*

$$B \times C \models \Phi\big(\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle 1, 0\rangle\big)$$

si y sólo si

$$a = c.$$

para todo $B, C \in \mathcal{V}$, *y* $a, c \in B$, $b, d \in C$.

"Corolario" de TP

Una variedad $\mathcal{V}$ con 0 & 1 tiene DFC si y sólo si tiene BFC.

“Corolario” de TP

Una variedad $\mathcal{V}$ con 0 & 1 tiene DFC si y sólo si tiene BFC.

“existe” $x \cdot z = y \cdot z \implies$ SRP (!!!)

Refinamiento Estricto (SRP)

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[drr, "p_2"] & & \\
B_1 \arrow[r, phantom, "\times"] \arrow[d, "b_{11}"] \arrow[dd, "b_{12}"'] & B_2 \arrow[drr, "b_{21}"] \arrow[ddrr, "b_{22}"'] & & C_1 \arrow[r, phantom, "\times"] \arrow[dlll, "c_{11}"'] \arrow[d, "c_{21}"] & C_2 \arrow[ddllll, "c_{12}"] \arrow[ddl, "c_{22}"] \\
D_{11} & & & D_{21} & \\
D_{12} & & & D_{22} &
\end{tikzcd}
$$

$\Leftarrow$ "$x \cdot z = y \cdot z$"

$\Downarrow$

$$b_{11} \circ \pi_1 = c_{11} \circ p_1$$
$$b_{21} \circ \pi_2 = c_{21} \circ p_1$$
$$b_{12} \circ \pi_1 = c_{12} \circ p_1$$
$$\cdots$$

“Corolario” de TP

Una variedad $\mathcal{V}$ con 0 & 1 tiene DFC si y sólo si tiene BFC.

“existe” $x \cdot z = y \cdot z \quad \Longrightarrow \quad$ SRP (!!!)

Para ($\Leftarrow$), se usa el Teorema de Beth [1953]. *Gracias Beth!!!*

"Corolario" de TP

Una variedad $\mathcal{V}$ con 0 & 1 tiene DFC si y sólo si tiene BFC.

"existe" $x \cdot z = y \cdot z \quad \Longrightarrow \quad$ SRP (!!!)

Para ($\Leftarrow$), se usa el Teorema de Beth [1953]. *Gracias Beth!!!*

Diego:

Fetch!

“Corolario” de TP

Una variedad $\mathcal{V}$ con 0 & 1 tiene DFC si y sólo si tiene BFC.

“existe” $x \cdot z = y \cdot z \implies$ SRP (!!!)

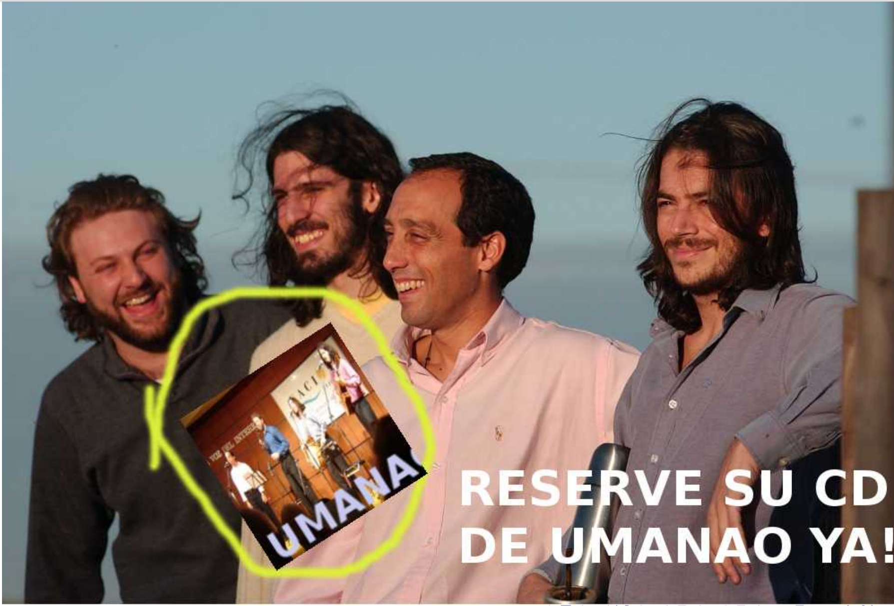
Para ($\Leftarrow$), se usa el Teorema de Beth [1953]. *Gracias Beth!!!*

Diego:

Fetch!

Pedro:

Guau! Auuuuu!


UMANAO
RESERVE SU CD
DE UMANAO YA!

Hallando fórmulas. . .

$$\mathrm{BFC} \overset{?}{\rightsquigarrow} \Phi(x, y, z)$$

Hallando fórmulas. . .

$$\text{BFC} \xrightarrow{1} \boxed{\text{Términos}} \xrightarrow{2} \Phi(x, y, z)$$

Hallando fórmulas...

$$\begin{array}{ccccc} \text{BFC} & \xrightarrow{1} & \boxed{\text{Términos}} & \xrightarrow{2} & \Phi(x,y,z) \\ & & \downarrow & & \\ & & x \cdot y, x + z^2, \ldots & & \end{array}$$

Hallando fórmulas...

$$\begin{array}{ccccc} \text{BFC} & \xrightarrow{1} & \boxed{\text{Términos}} & \xrightarrow{2} & \Phi(x,y,z) \\ & & \downarrow & & \\ & & x \cdot y, x + z^2, \ldots & & \end{array}$$

Maquinaria

1. Condiciones de Mal'cev.
2. Lógica + Elementos Centrales.

Hallando fórmulas...

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{BFC} & \xrightarrow{1} & \boxed{\text{Términos}} & \xrightarrow{2} & \Phi(x,y,z) \\ & & \downarrow & & \\ & & x \cdot y, x + z^2, \ldots & & \end{array}$$

Maquinaria

1. Condiciones de Mal'cev.
2. Lógica + Elementos Centrales.

Condiciones de Mal'cev

Caracterización de álgebras libres de $\mathcal{V}$:

$$F_{\mathcal{V}}(X) \;\cong\; T_{\mathcal{V}}(X)/\equiv_{\mathcal{V}}$$

Es decir, los elementos de $F_{\mathcal{V}}(X)$ se pueden pensar como términos.

Condiciones de Mal'cev

Caracterización de álgebras libres de $\mathcal{V}$:

$$F_{\mathcal{V}}(X) \cong T_{\mathcal{V}}(X)/\equiv_{\mathcal{V}}$$

Es decir, los elementos de $F_{\mathcal{V}}(X)$ se pueden pensar como términos.

Condiciones de Mal'cev

Caracterización de álgebras libres de $\mathcal{V}$:

$$F_{\mathcal{V}}(X) \;\cong\; T_{\mathcal{V}}(X)/\equiv_{\mathcal{V}}$$

Es decir, los elementos de $F_{\mathcal{V}}(X)$ se pueden pensar como términos.

$F(X)$ satisface (v.g.) BFC $\rightsquigarrow$ Relaciones entre términos

Condiciones de Mal'cev

Caracterización de álgebras libres de $\mathcal{V}$:

$$F_{\mathcal{V}}(X) \cong T_{\mathcal{V}}(X)/\equiv_{\mathcal{V}}$$

Es decir, los elementos de $F_{\mathcal{V}}(X)$ se pueden pensar como términos.

$F(X)$ satisface (v.g.) BFC $\Leftrightarrow$ Relaciones entre términos

La vuelta. . .

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dlll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[drrr, "p_2"] & & & \\
B_1 & \times & B_2 & & C_1 & \times & C_2
\end{tikzcd}$$

Preservación

Si Φ vale en B_1 y en B_2, entonces vale en C_1.

La vuelta. . .

$$
\begin{tikzcd}
& & & A \arrow[drr] \arrow[drr, dotted] \arrow[drrrr, dotted] & & & & \\
B_1 \arrow[urrr] & \times & B_2 \arrow[ur] & & & C_1 & \times & C_2
\end{tikzcd}
$$

Preservación

Si Φ vale en B_1 y en B_2, entonces vale en C_1.

La vuelta. . .

$$
\begin{tikzcd}
& & & A \arrow[dr, bend right] \arrow[dr, dotted] \arrow[drrr, dotted] & & & \\
B_1 \arrow[urrr, bend left] & \times & B_2 \arrow[ur, bend right] & & C_1 & \times & C_2
\end{tikzcd}
$$

Preservación

Si Φ vale en B_1 y en B_2, entonces vale en C_1.

La vuelta. . .

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[drr, bend left] \arrow[drr, dotted] \arrow[drrrr, dotted] & & & & \\
B_1 \arrow[urrr, bend left] & \times & B_2 \arrow[ur, bend right] & & & C_1 & \times & C_2
\end{tikzcd}
$$

Preservación

Si Φ vale en B_1 y en B_2, entonces vale en C_1.

Z se preserva por $\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ BFC.

Al final del camino

- Una condición de Mal'cev *manejable* de BFC.
- Φ se preserva *siempre* por factores directos.
- La solución al problema de la *propiedad (*)* (Willard, [1990]).
- Estudio de la parte "trivial" de la *jerarquía de definibilidad*.
- Construcción de casos no "triviales", usando la computadora.

Al final del camino

- Una condición de Mal'cev *manejable* de BFC.
- Φ se preserva *siempre* por factores directos.
- La solución al problema de la *propiedad (*)* (Willard, [1990]).
- Estudio de la parte "trivial" de la *jerarquía de definibilidad*.
- Construcción de casos no "triviales", usando la computadora.

Al final del camino

- Una condición de Mal'cev *manejable* de BFC.
- Φ se preserva *siempre* por factores directos.
- La solución al problema de la *propiedad (*)* (Willard, [1990]).
- Estudio de la parte "trivial" de la *jerarquía de definibilidad*.
- Construcción de casos no "triviales", usando la computadora.

Al final del camino

- Una condición de Mal'cev *manejable* de BFC.
- Φ se preserva *siempre* por factores directos.
- La solución al problema de la *propiedad (*)* (Willard, [1990]).
- Estudio de la parte "trivial" de la *jerarquía de definibilidad*.
- Construcción de casos no "triviales", usando la computadora.

Al final del camino

- Una condición de Mal'cev *manejable* de BFC.
- Φ se preserva *siempre* por factores directos.
- La solución al problema de la *propiedad (*)* (Willard, [1990]).
- Estudio de la parte "trivial" de la *jerarquía de definibilidad*.
- Construcción de casos no "triviales", usando la computadora.

¿Preguntas?

“. . . ¿que vino habrá traído?”

[1953] E. W. Beth
On Padoa's method in the theory of definition.
Indag. Math. **15**: 330–339.

[2005] R. Carnota
Chacarera del Pensador.
Acqua Records.

[1990] R. Willard
Varieties Having Boolean Factor Congruences.
J. Algebra, **132**: 130–153.