

Objetivos: Comprender el concepto de ligadura de variables. Reconocer la dificultad de la sustitución en lenguajes con ligadura. Comprender la necesidad de un “estado” para lenguajes con variables. Conocer y poder probar las propiedades semánticas: coincidencia y sustitución. Usamos fuente sans-serif (como en x) para referirnos a variables concretas y serif (como en p), para meta-variables.

SIEMPRE piense a qué conjunto pertenecen las entidades matemáticas involucradas (por ejemplo, para entender qué significan que dos cosas en el mismo conjunto sean iguales).

Repaso. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; justifique su respuesta.

- Sea L un lenguaje, D el dominio semántico y sea $\llbracket - \rrbracket: L \rightarrow D$:
 - si $\llbracket - \rrbracket$ NO es inyectiva, entonces NO es una función semántica.
 - si $\llbracket - \rrbracket$ NO es suryectiva, entonces NO es una función semántica.
- La dirección por sintaxis garantiza que un conjunto de ecuaciones define una función semántica.
- Si un conjunto de ecuaciones que define una semántica no es dirigido por sintaxis, entonces la semántica no es composicional.

Ejercicios.

- Considere los siguientes predicados (con la semántica dada en el teórico).

$$x \div y = z$$

$$\exists r.(0 \leq r < y) \wedge (x = y * z + r)$$
 - Dé un estado en el cual estos predicados tienen distinta semántica.
 - Caracterizar los $\sigma \in \Sigma$ para los cuales estos predicados tienen la misma semántica.
- Extienda la gramática abstracta de las expresiones enteras para la sumatoria; luego defina la semántica de la nueva expresión. Recuerde las propiedades que debe tener un conjunto de ecuaciones para que definan una función semántica.
- En cada una de las siguientes expresiones, ¿cuáles son las ocurrencias ligadoras, cuáles las ligadas y cuáles las libres?
 - $\forall x. \forall z. x < t \wedge t \leq z \Rightarrow \exists y. x \leq y \wedge y < z$
 - $x > 0 \Rightarrow (\forall y. y \geq x \Rightarrow \exists x. x > 0 \wedge x < y)$.
 - $\sum_{i=0}^n (k * \sum_{k=1}^i (i - k) * k)$.
- Dé el resultado de la sustitución simultánea:
 - t por $x + y + z$ en $\forall x. \forall z. x < t \wedge t \leq z \Rightarrow \exists y. x \leq y \wedge y < z$
 - y por x , z por y y x por z en $x > 0 \Rightarrow (\forall y. y \geq x \Rightarrow \exists x. x > 0 \wedge x < y)$.
- Dé un ejemplo que muestre que si hacemos reemplazo sintáctico en lugar de sustitución, podemos alterar la semántica.
- Pruebe por inducción en los predicados:

$$FV(p/\delta) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$
 ¿Necesita una propiedad similar para las expresiones?
- Enunciar y demostrar de manera detallada el Teorema de Coincidencia para la Lógica de Predicados.
- Sean p, q dos frases de la misma categoría sintáctica, usar el teorema de sustitución para demostrar que si $\llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$ entonces para todo $\delta \in \Delta$, $\llbracket p/\delta \rrbracket = \llbracket q/\delta \rrbracket$.
- ¿Vale el recíproco? Es decir, dados p, q en la misma categoría sintáctica, si para todo $\delta \in \Delta$, $\llbracket p/\delta \rrbracket = \llbracket q/\delta \rrbracket$, ¿se cumple necesariamente $\llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$?
- Sean δ y γ dos sustituciones, defina la composición de δ con γ ($\delta \circ \gamma \in \Delta$).
 - Pruebe que para toda frase p y cualesquiera sustituciones δ y γ vale $\llbracket p/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket (p/\delta)/\gamma \rrbracket$.