Estructura de la materia a grandes rasgos:

Primera Parte: Lenguaje imperativo

Segunda Parte: Lenguaje aplicativo puro, y lenguaje aplicativo con referencias y asignación

Ejes de contenidos de la primer parte

1. Introducción a la sintaxis y la semántica de lenguajes
2. El problema de dar significado a la recursión e iteración
3. Un Lenguaje Imperativo Simple

¿Qué define una ecuación recursiva?

Consideramos la siguiente definición en Haskell:

```
g ::  Int -> Int
g n = if n == 0 then 0
       else if n == 1 then 1
            else g (n-2)
```

¿Cúal es el significado de este programa?

¿Qué objeto abstracto constituye el significado de este programa?

Una ecuación recursiva para una función entera

$$f\ n \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \qquad (ER)$$

¿la ecuación define una función?

¿define varias?

¿puede una ecuación no definir ninguna función?

Problemas de las definiciones recursivas

Surgen varias dificultades al pretender dar significado de manera genérica a las funciones definidas de esta manera.

- el dominio semántico $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ es inadecuado, ya que al incluir la recursión se incorpora la posibilidad de que la evaluación que efectúa haskell no termine. Solucionamos este inconveniente incorporando un objeto al dominio de "resultados posibles" que denota la "no terminación": $\perp$, denominado *bottom*.

  Definimos: $\mathbf{Z}_\perp = \mathbf{Z} \cup \{\perp\}$.

- hay muchas funciones de $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_\perp$ que satisfacen la ecuación (ER).

Una solución

$$mod2\ n \ = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Otra solución:

$$modRara\ n \ = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \geq 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es entonces el significado de la ecuación?

¿Cómo hacemos para señalar "la" solución que nos interesa (en este caso mod2)?

La idea es la siguiente: vamos a inventar un orden parcial entre los elementos de forma tal que $\perp$ sea menor que todos los demás. Y cada vez que escribamos una ecuación como (ER), diremos que nos interesa la menor solución posible.

El sentido del orden es el siguiente. Evitamos las soluciones **demasiado informativas**, o sea las que proveen información que no surge de la ecuación (ER).

Esto se ajusta a la realidad: un programa que no termina no da ninguna información, ni siquiera da la información de que no termina.

Órdenes parciales, posets

Un **orden parcial** es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un **conjunto parcialmente ordenado** (poset) es un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ un orden parcial.

$(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ son ejemplos de posets

$(X, =)$ se llama **orden discreto**.

Por ejemplo

$$(\mathbb{Z}, \leq)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ \vdots \end{array}$$

$$(\mathbb{Z}, =)$$

$$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$$

Poset de Funciones

Si Y con $\leq_Y$ es poset, el espacio de funciones de

$$X \to Y$$

es un poset con $\leq$ definido así:

$$f \leq g \quad \text{sii} \quad \text{para todo } x \in X \text{ se tiene } f\ x \leq_Y g\ x$$

para $f, g \in X \to Y$.

Lifting

$(X, \leq_X)$ un poset

Entonces $X_\perp \; = \; X \cup \{\perp\}$ también es un poset con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \quad sii \;\; x \leq_X y \; \vee \; x = \perp$$

Si X es el orden discreto, $X_\perp$ se llama **llano.**

El lifting de $\mathbb{Z}$ (con el orden discreto) es el orden llano dado por el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ & & \ldots & \backslash & | & / & \ldots & & \\ & & & & \perp & & & & \end{array}$$

Infinito

$(X, \leq_X)$ un poset

entonces $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ también es un poset con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \quad \text{sii} \quad x \leq_X y \quad \vee \quad y = \infty$$

Supremo

Dado $Q \subseteq P$, el supremo de Q (se escribe $\sup(Q)$) es el elemento de P que satisface:

- $\sup(Q)$ es cota superior de Q, y
- $\sup(Q)$ es menor que cualquier otra cota superior de Q.

El $\sup(Q)$ puede no existir (por ejemplo, en $\mathbb{N}$ con $\leq$, el supremo del conjunto de todos los números pares no existe).

Pero en los casos en que el supremo existe, es único. Cuando existe, decimos que Q tiene supremo (que puede no estar en Q, está en P).

Cadenas

En un orden parcial P con $\leq$, una **cadena** es una secuencia infinita $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ de elementos de P.

Si el conjunto $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n. \ldots\}$ es infinito, se dice que la cadena es **interesante.** Si dicho conjunto es finito, se dice que la cadena es **no interesante.**

Claramente la cadena es no interesante sii a partir de cierto punto la secuencia no hace más que repetir indefinidamente un elemento. Obviamente, una cadena no interesante siempre tiene supremo: es el elemento que se repite indefinidamente.

Predominios

Un predominio es un poset P tal que todas las cadenas tienen supremo. Como las cadenas no interesantes siempre tienen supremo, puede redefinirse así: "un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas interesantes tienen supremo".

Los órdenes discretos y llanos son predominios.

$\mathbb{Z}$ con $\leq$ no es predominio

$\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un predominio.

Predominio $X \to Y$

¿Cuándo $X \to Y$ es predominio?

Sea Y es predominio, y $f_0, f_1, f_2, ...$ una cadena en $X \to Y$.
Entonces para cada $x \in X$, la cadena:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...$$

tendrá supremo en Y.

Entonces definimos $f = sup(\{f_i\})$ de la siguiente manera:

$$f(x) = sup(\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...\})$$

Dominios

Un **dominio** es un predominio D con elemento mínimo (que se suele denotar $\perp$).

Los órdenes llanos son dominios (se los llama dominios llanos).
Los órdenes discretos en general no son dominios.
Si P es un predominio $P_\perp$ es un dominio.

¿Cuándo $X \to Y$ es dominio?

$X \to Y$ será dominio cuando Y los sea. Además, el menor elemento será la función definida idénticamente $\perp_Y$:

$\perp_{X \to Y}: X \to Y$ $\qquad\qquad$ $\perp_{X \to Y}(x) = \perp_Y$

Funciones monótonas

Monotonía: Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ posets, y sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **monótona** si f preserva orden, es decir, si

$$x \leq_P y \Rightarrow f\ x \leq_Q \ f\ y$$

Proposición Si la función $f \in P \to Q$ entre predominios es monótona, entonces $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe, y

$$\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$$

La recíproca de la proposición no es cierta. ¿Contraejemplo?

Continuidad

Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **continua** si f preserva supremos de cadenas, es decir, si

$$p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$$

entonces el supremo $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y

$$\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$$

Proposición Si f es continua, entonces f es monótona.

Corolario Sean P y Q predominios. Sea $f \in P \to Q$ monótona. Entonces, f es continua sii para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ vale:

$$f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})) \leq_Q \sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$$

Funciones estrictas Sean D y D' dominios con $\perp$ y $\perp'$ respectivamente. Se dice que la función $f \in D \to D'$ es **estricta** si f preserva elemento mínimo, es decir, si $f \perp = \perp'$.

Teorema del Menor Punto Fijo

Sea D un dominio, y $F \in D \to D$ continua. Entonces

$$\sup_D(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\})$$

existe y es el menor punto fijo de F.

Demostración del TMPF

Claramente $\perp \leq F \perp$. Como F es monótona obtenemos

$$F \perp \leq F\,(F \perp) = F^2 \perp$$

Iterando esto obtenemos $\perp \leq F \perp \leq F^2 \perp \leq F^3 \perp \leq \ldots$, es decir que $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$ es una cadena y por lo tanto el supremo $x = \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\})$ existe.
Veamos que es punto fijo de F, es decir, que $F\ x = x$:

$$\begin{aligned} F\ x &= F\ \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F\ (F^i \perp) | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F^{i+1} \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= x \end{aligned}$$

Veamos que es el menor de ellos. Sea y punto fijo de F, es decir $F\ y = y$. Veamos que $x \leq y$.

Claramente $\perp \leq y$ por ser elemento mínimo.

Como F es monótona, se obtiene $F \perp \leq F\ y = y$.

Iterando, obtenemos $F^i \perp \leq y$ para todo i. Es decir, y es cota superior de la cadena $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$.

Como el supremo es la menor de esas cotas,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & \leq & y \end{array}$$

Fin de la demostración del TMPF.

Aplicación del TMPF al problema original

Queremos encontrar la menor solución a la ecuación

$$f\ n \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \qquad (ER)$$

Definiremos $F \in (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to Z_\perp)$ de manera que:

f satisface (ER) si y sólo si f es punto fijo de F

Aplicación del TMPF al problema original

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n - 2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Así, $F\ f\ n$ es un nombre para la parte derecha de la ecuación (ER), que ahora se puede reescribir

$$f\ n = F\ f\ n$$

O más brevemente,

$$f = F\ f$$

Es decir que buscar una solución a la ecuación (ER) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F.

Asumiendo que F es continua, la menor solución es

$$\sup_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} (\{F^i \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} | i \geq 0\})$$

donde $\perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}$ es el elemento mínimo de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, es decir, la función que devuelve siempre $\perp$.

¿Cómo calcular el menor punto fijo en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$?

Dadas $f, g \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, tenemos que

- $f \leq g$ sii f está menos definida que g, y donde están ambas definidas valen lo mismo.

  Decimos que f está menos definida que g si $f\ n = \perp$ cada vez que $g\ n = \perp$.

- $\mathbb{Z}_\perp$ es un orden llano, de manera que las únicas cadenas posibles son de la forma:

$$\perp \leq \perp \leq ... \leq \perp \leq k \leq k...$$

¿Cómo calcular el menor punto fijo en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$?

Conclusión:

Si f es la solución buscada (el menor punto fijo), entonces obtenemos el valor de $f\ n$ de la siguiente manera:

- Si la cadena

$$F^0 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n, \quad F^1 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n, \quad F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n \ldots$$

  adopta algún valor ditinto de $\perp$, ese será el valor de $f\ n$

- Si la cadena mencionada es siempre $\perp$, entonces $f\ n = \perp$