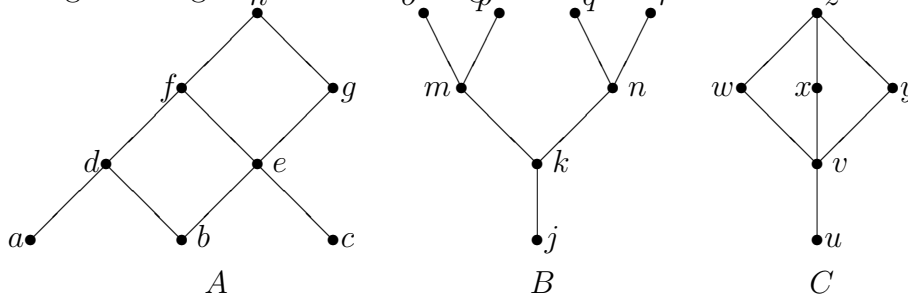


Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden

14/08/2015, Práctico 2: Posets.

Objetivo. Comprender la relación de cobertura en un orden parcial (poset) y su representación a través de diagramas de Hasse. Entender las nociones de máximo y mínimo de subconjuntos de un poset, distinguiéndolas de las de maximal y minimal; utilizar las nociones de máximo y mínimo para analizar supremos e ínfimos. Reconocer qué funciones entre posets son isomorfismos y cuáles no.

1. La siguiente figura muestra los diagramas de Hasse de tres órdenes parciales.



- Para el diagrama C , liste todos los pares de la relación \leq .
- ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?
- ¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?
- ¿Qué elementos cubren e ?
- Encuentre cada uno de los siguientes, si es que existe. En cada caso determine previamente el conjunto de cotas correspondiente.

$$\sup\{d, c\}, \quad \sup\{w, y, v\}, \quad \sup\{p, m\}, \quad \inf\{a, g\}, \quad \sup\{m, n\} \quad \inf\{g, a, f\}$$

- Determine la validez de las siguientes afirmaciones para un poset (P, \leq) :
 - Si P tiene elemento máximo x , entonces x es el único elemento maximal.
 - Si P es finito y tiene un único elemento maximal x , entonces x es el máximo.
 - Si P tiene un único elemento maximal x , entonces x es el máximo.
- Sea $P = \{a, b, c, d, e\}$. Construya diagramas de Hasse que representen posets formados por estos 5 elementos, y que satisfagan:
 - El supremo de $\{a, b\}$ es c , y el ínfimo es d . Además el ínfimo de P es e .
 - El supremo de $\{a, b\}$, el supremo de $\{a, c\}$ y el supremo de $\{b, c\}$ coinciden, y son todos el elemento d .
 - P no tiene supremo ni ínfimo.
 - El supremo de $\{a, b\}$ no existe puesto que $\{a, b\}$ no tienen cotas superiores.
 - Aunque $\{a, b\}$ tiene cotas superiores, el supremo de $\{a, b\}$ no existe.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(D_{90}, |)$ de los divisores de 90
 - Dibuje el diagrama de Hasse de la relación “divide a”.
 - Calcule $\sup\{6, 10\}$, $\inf\{6, 10\}$, $\sup\{30, 9\}$ y $\inf\{9, 30\}$.
 - Considere los subconjuntos de D_{90} que sean órdenes totales. Liste los maximales (usando la relación de inclusión); existe un máximo?
- Determine cuáles de los siguientes mapas de P a Q son isomorfismos. En caso de no serlo determine qué es lo que falla.
 - $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = x + 1$
 - $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = 2x$
 - $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = -x$
 - $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión). La función f está definida de la siguiente manera. Si a, b están ambos en A , o no están ninguno de los dos en A , entonces $f(A) = A$. En otro caso f quita de A al que está y pone al que no está. Por ejemplo, $f(\{a\}) = \{b\}$ $f(\{a, c\}) = \{b, c\}$.
 - $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión), y $f(A) = A^c$.