Introducción a la Lógica y la Computación

Parte III: Lenguajes y Autómatas

Clase del 18 de Noviembre de 2016

Un poco de memoria I/II

En esta tercera parte de la materia, hasta ahora vimos:

- Autómatas Determinísticos, Autómatas No Determinísticos.
- Expresiones Regulares, Gramáticas Regulares.
- Equivalencias entre todos los formalismos para representar lenguajes regulares:

$$\text{GR} \Rightarrow \text{NFA} \Rightarrow \text{AFD} \Rightarrow \text{ER} \Rightarrow \text{GR}$$

Un poco de memoria II/II

- Jerarquía de Lenguajes: no todos los lenguajes son regulares.
- Vimos algunos ejemplos que nos resultan interesantes donde necesitamos lenguajes que no son regulares.
- Bajamos un poco las restricciones: lenguajes libres de contexto (más expresividad).
- Gramáticas Libres de Contexto.

Lenguajes Libres de Contexto

- Hemos visto una forma de representar lenguajes libres de contexto (gramáticas).
- Para lenguajes regulares, había varios formalismos (algunos relacionados con la teoría de máquinas abstractas).
- Podemos pensar que hay otros formalismos para representar lenguajes libres de contexto.
- Vamos a ver un tipo particular de autómatas: Autómatas con Pila (o en inglés, *pushdown automata*).

Autómatas con Pila

- Un Autómata con Pila, es un autómata finito que posee control sobre una pila.
- Es decir, solo puede "leer", "poner" o "sacar" el primer elemento.
- Dado el estado actual del autómata y el primer elemento de la pila, un símbolo de input nos llevará (posiblemente en forma no determinística) el estado siguiente y a la modificación que se debe hacer en el primer elemento de la pila.

Autómatas con Pila - Aceptación de una cadena

- Diremos que una cadena es aceptada por *pila vacía* por el autómata con pila si cuando la aplicamos obtenemos una pila vacía.
- Diremos que una cadena es aceptada por *estado final* por el autómata con pila si lleva el estado inicial a uno final.
- Los lenguajes aceptados por los autómatas con pila (tanto los aceptados por pila vacía o por estado final) son los mismos que los aceptados por las gramáticas libres de contexto e incluyen estrictamente a los lenguajes regulares.

Autómatas con Pila - Ejemplo I/III

Consideremos el siguiente lenguaje L (no regular, demostrar con Pumping Lemma) sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1, c\}$:

$$L = \{\alpha c \alpha^R \mid \alpha \in (0+1)^*\},$$

donde $.^R$ indica la reversa de una cadena.

Sin embargo, es un lenguaje libre de contexto generado por la gramática

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid c.$$

Vamos a mostrar un autómata con pila cuyo lenguaje por pila vacía es L.

Autómatas con Pila - Ejemplo II/III

- Los símbolos de input serán 0, 1 y c.
- Consideremos dos estados q_1 y q_2 y que en la pila se pueden apilar tres tipos de objetos: rojos (R), verdes (V) y azules (A).
- Apilamos un elemento R para indicar el comienzo de la pila.
- Usamos la pila como "memoria": cada vez que el input es 0, apilamos una A, cada vez que es un 1, apilamos una V (sin cambiar el estado inicial).
- Cuando ingresa el input c, cambiamos de estado para indicar que tenemos que empezar a leer el final de la palabra.
- Ahora deberemos desapilar convenientemente, de tal forma que si después de c viene α^R la pila quede vacía.
- El último movimiento, un movimiento ϵ, se define de la siguiente manera: si estamos en el segundo estado y la pila muestra el R, se saca el R.

Autómatas con Pila - Ejemplo III/III

Resumiendo: el autómata tendrá las siguientes reglas:

1. Comenzamos en el estado q_1 y con R en la pila.
2. En el caso en que el estado es q_1 el autómata actúa de la siguiente manera. Si se ingresa el símbolo de input 0, agregamos a la pila una A. Si el símbolo de input es 1 agregamos una V. En ambos casos el estado permanece en q_1. Si la entrada es c pasamos al estado q_2 y la pila no cambia.
3. En el caso en que el estado es q_2 el autómata actúa de la siguiente manera. Si se ingresa el símbolo de input 0 y el primero de la pila es A, se retira el primer elemento de la pila (es decir la A). Si el símbolo de input es 1 y el primero de la pila es V, se retira el primer elemento de la pila. Si el primer elemento de la pila es R, se lo retira sin esperar input. En todos los casos el estado continúa siendo q_2.
4. En las situaciones no contempladas en los items anteriores, el autómata no hace nada.

Autómatas con Pila - Definición Formal

Definición

Un autómata con pila es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$*, donde:*

1. Q *es un conjunto finito de estados.*
2. Σ *es el alfabeto de entrada.*
3. Γ *es el alfabeto de la pila.*
4. $q_0 \in Q$ *el estado inicial.*
5. $Z_0 \in \Gamma$ *el símbolo inicial de la pila.*
6. $F \subset Q$ *el conjunto de estados finales.*
7. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$*, donde* $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$ *indica los subconjuntos finitos de* $Q \times \Gamma^*$*.*

Observación: Si tenemos $\delta(q, a, Z) = \{(p, \gamma)\}$ esto significa que si el estado actual es q y el tope de la pila es Z, cuando el input es a el estado del autómata cambia a p y en la pila se produce el reemplazo de Z por γ, quedando el primer símbolo de γ como tope de la pila.

Autómatas con Pila - Ejemplo

Describamos de manera formal el ejemplo que vimos antes:
$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{V, A, R\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$, donde δ está definida como:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, AX)\} & \delta(q_1, 1, X) = (\{q_1, VX)\} \\
\delta(q_1, c, X) = (\{q_2, X)\} & \delta(q_2, 0, A) = \{(q_2, \epsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, V) = \{(q_2, \epsilon)\} & \delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}
\end{array}
$$

X es un símbolo arbitrario de la pila. Las demás transiciones son $\delta(q, a, Z) = \emptyset$.

Autómatas con Pila - Configuraciones

Dado un autómata de pila, vamos a describir formalmente la situación después de consumir (parte de) una cadena.

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *un autómata con pila, una configuración (o descripción instantánea) es una tripla* (q, ω, γ)*, tal que* $q \in Q$*,* $\omega \in \Sigma^*$ *y* $\gamma \in \Gamma^*$*.*

Si $(q, a\omega, Z\gamma)$ *y* $(p, \omega, \beta\gamma)$ *son dos configuraciones, denotaremos* $(q, a\omega, Z\gamma) \vdash (p, \omega, \beta\gamma)$ *si* $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$*.*

$(q, a, \gamma) \vdash^* (q', a', \gamma')$ *si existen* $(q_1, a_1, \gamma_1), \ldots, (q_n, a_n, \gamma_n)$ *tal que* $(q, a, \gamma) \vdash (q_1, a_1, \gamma_1) \vdash \ldots \vdash (q_n, a_n, \gamma_n) \vdash (q', a', \gamma')$*.*

Observación: siempre vale que $(q, a, \gamma) \vdash^* (q, a, \gamma)$*.*

Autómatas con Pila - Lenguaje Aceptado

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un autómata con pila, definimos:

Definición

$L(M)$ es el lenguaje de M por estado final si:

$$L(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, Z) \vdash^* (p, \epsilon, \gamma) \text{ para algún } p \in F,\ \gamma \in \Gamma^*\}.$$

Definición

$N(M)$ es el lenguaje de M por pila vacía si:

$$N(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, Z) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon),\ \text{para algún } p \in Q\}.$$

Ambas definiciones son equivalentes!

Autómatas con Pila y Gramáticas Regulares

Proposición

Sea G una gramática libre de contexto, existe un autómata con pila M tal que $L(G) = N(M)$.