

# Autómatas Finitos Determinísticos (DFA)

Introducción a la Lógica y la Computación  
Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba

26/10/16

# Info útil

## Bibliografía:

- *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación.*
  - Autores: Hopcroft, John E; Ullman, Jeffrey D.
  - Ubicación en Biblioteca: C C1.3 H791.
- Apunte de la cátedra.
  - <http://www.cs.famaf.unc.edu.ar/wiki/lib/exe/fetch.php?media=intrologica:automatas2015-1.pdf>

# Temas del día

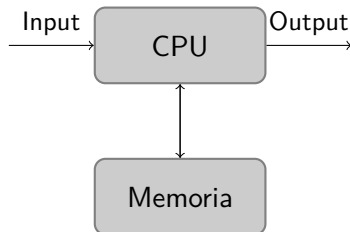
- 1 **Introducción**
  - Modelos de Computación
- 2 **Autómata Finito Determinístico (DFA)**
  - Intuiciones
  - Definición
- 3 **Lenguajes y Autómatas**
  - Lenguajes

# Modelos de Computación

- **Modelo de computación:** es un modelo matemático que aproxima el funcionamiento de una computadora.
- Sirven para estudiar sus **capacidades** y **limitaciones**.
  - **Computabilidad:** ¿Qué problemas puede resolver una computadora?
  - **Complejidad:** ¿Cuáles son los problemas computacionalmente difíciles?
- Existen diferentes modelos de computación:
  - Máquinas de Turing (Turing - 1936)
  - Cálculo Lambda (Church - 1936)
  - Autómatas Finitos (Rabin y Scott - 1950)
  - ....
- Diferente poder de cómputo.

# Modelo General de Máquina

- En su forma mas básica:

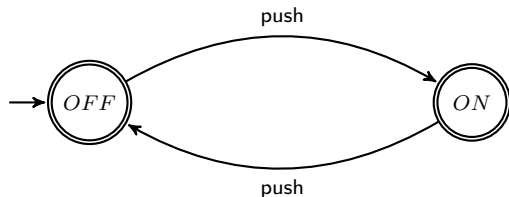


- El tipo de memoria afecta el poder computacional.
  - Sin memoria: Autómatas finitos.
  - Con una pila como memoria: Push Down Automatas.
  - Con memoria de acceso aleatorio: Maquinas de Turing.
- En esta materia estudiaremos los **Autómatas Finitos**.

# Intuiciones I

- Es común **modelar** sistemas como:
  - conjunto de **estados**, y
  - **acciones** que llevan de un estado a otro.
- **Estado**: Es una parte relevante de la historia del sistema.

**Ejemplo:** Interruptor (o switch)



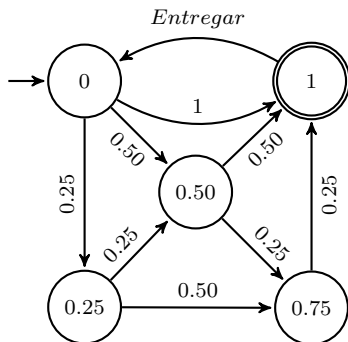
- Puede estar en ON u OFF (sus estados).
- **Aprentándolo** pasa de un estado a otro.
- Si está en ON → estaba en OFF y alguien lo apretó.
- Si está en OFF → estaba en ON y alguien lo apretó.

# Intuiciones II

- El sistema **empieza** en un determinado estado.
- Existen estados **finales** (o de aceptación).
- El efecto de una acción **depende** del estado actual.

**Ejemplo:** Expendedor de golosinas.

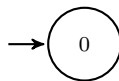
- Estado: Dinero que tiene.
- Inicialmente sin dinero (\$0).
- Entrega golosina **solo si tiene** \$1.
- Acepta: Monedas de 0.25, 0.50 y 1.



# Intuiciones III

¿Qué tienen en común estos ejemplos:?

- Estados iniciales:



- Estados finales:



- Acciones para pasar de un estado a otro.

$\{push\}$        $\{0.25, 0.50, 1, Entregar\}$

- El efecto de una acción depende del estado donde se aplica.

AUTOMATAS FINITOS DETERMINISTICOS.



# Definición

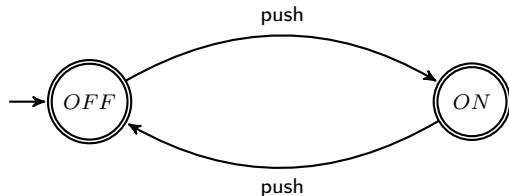
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **Determinístico:** En todo momento está en un solo estado.

## Autómata Finito Determinístico (DFA)

Un DFA es una 5-tupla  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es un conjunto finito de símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$  es la función (total) de transición de estados.
- $q_0 \in Q$  es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$  son los estados finales.

# Ejemplo - Interruptor



Definimos  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

- $Q = \{ON, OFF\}$ .
- $\Sigma = \{push\}$ .
- $q_0 = OFF$ .
- $F = \{ON, OFF\}$ .

- $\delta$  definida como:

$$\delta(ON, push) = OFF.$$

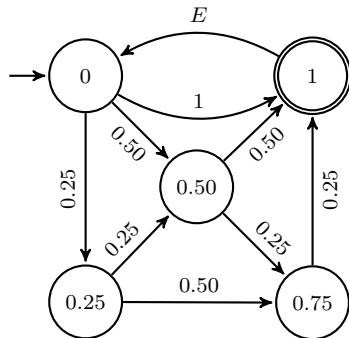
$$\delta(OFF, push) = ON.$$

## Ejemplo - Expendedor de Golosinas

Definimos  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

- $Q = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$ .
- $\Sigma = \{0.25, 0.50, 1, E\}$ .
- $q_0 = 0$ .
- $F = \{1\}$ .
- $\delta$  definida como:

	0.25	0.50	1	$E$
$\rightarrow 0$	0.25	0.50	1	—
0.25	0.50	0.75	—	—
0.50	0.75	1	—	—
0.75	1	—	—	—
* 1	—	—	—	0



# Diagrama de Transición

## Algoritmo de Generación de Diagramas de Transición

Dado un autómata  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , su diagrama de transición se construye de la siguiente forma:

- 1 Se agrega un nodo para cada estado  $q_i \in Q$ .
- 2 Marcamos al nodo del estado inicial  $q_0$  con una flecha que ingresa.
- 3 Marcamos los estados finales  $q_i \in F$  con doble círculos.
- 4 Agregamos un eje etiquetado  $a$  del nodo  $q_i$  al nodo  $q_j$  si existe una transición  $\delta(q_i, a) = q_j$ .

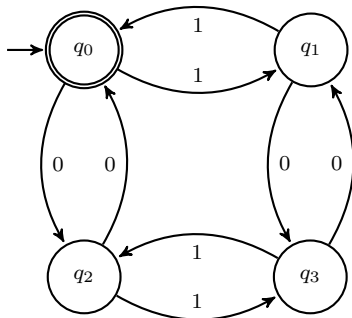
Todo DFA tiene su correspondiente diagrama de transición.

# Ejemplo 5 - Creando un Diagrama de Transición

Sea  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ .
- $\Sigma = \{0, 1\}$ .
- Estado inicial:  $q_0$ .
- $F = \{q_0\}$ .
- $\delta$  definida como:

	0	1
$\rightarrow * q_0$	$q_2$	$q_1$
$q_1$	$q_3$	$q_0$
$q_2$	$q_0$	$q_3$
$q_3$	$q_1$	$q_2$



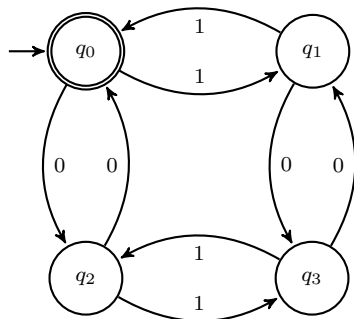
## Algunas Definiciones

- **Alfabeto ( $\Sigma$ ):** es un conjunto finito de símbolos.
  - Ej:  $\Sigma = \{0, 1\}$ .
- **Cadena:** secuencia finita de símbolos.
  - Ej: 01, 000111, 1010.
- $\epsilon$ : es la cadena vacía (sin símbolos).
- $\Sigma^*$ : conjunto de todas las palabras sobre  $\Sigma$ .
  - Ej:  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 000111, 1010, \dots\}$ .
- **Lenguaje:** Un lenguaje  $L$  sobre un alfabeto  $\Sigma$  es un conjunto de palabras sobre el alfabeto  $\Sigma$  ( $L \subseteq \Sigma^*$ ).
  - Ej:  $L = \{w \mid w \text{ termina en } 1\} \subseteq \Sigma^*$ .

# Operaciones sobre Cadenas

- **Longitud de una cadena  $w$  ( $|w|$ ):** es el nro. de símbolos.
  - $|abab| = 4$ ,  $|\epsilon| = 0$ .
- **Subcadena:** es una cadena incluida en una cadena.
  - Si  $w = bbabaa$ ,  $ab$  es subcadena de  $w$ ,  $aab$  no.
- **Prefijo de una cadena  $w$ :** es una subcadena de  $w$  que comienza con el primer símbolo de  $w$ .
  - Si  $w = bbabaa$ ,  $bba$  es un prefijo de  $w$ ,  $ba$  no.
- **Sufijo de una cadena  $w$ :** es una subcadena de  $w$  que termina con el último símbolo de  $w$ .
  - Si  $w = bbabaa$ ,  $baa$  es un sufijo de  $w$ ,  $aba$  no.
- **Concatenación de dos cadenas  $w$  y  $x$  ( $wx$ ):** es la unión de las cadenas  $w$  y  $x$ .
  - Si  $w = aaa$  y  $x = bbb$ ,  $ab = aaabbb$ .
  - $a\epsilon = \epsilon a = a$ .

# Intuiciones



- Consideremos secuencias de símbolos.
- A que estado nos llevan la secuencias:
  - $\langle 1, 0, 0, 0, 1 \rangle: q_0 \rightarrow q_2$ .
  - $\langle 0, 1, 0, 1 \rangle: q_0 \rightarrow q_0$ .
  - $\langle 0, 1 \rangle: q_0 \rightarrow q_3$ .
- Secuencia como “palabras”.
  - $\langle 1, 0, 0, 0, 1 \rangle \equiv 10001$ .
  - $\langle 0, 1, 0, 1 \rangle \equiv 0101$ .
  - $\langle 0, 1 \rangle \equiv 01$ .
- Un autómata **acepta** palabras.
  - Palabras aceptadas  $\equiv$  Lenguaje del autómata.
  - El lenguaje caracteriza al autómata.
  - ¿Cuál es el lenguaje de este autómata?



# Definiciones

## Transforma en ( $\rightarrow$ )

Sea  $M$  un DFA, sean  $p, q$  estados de  $M$  y  $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n$  una cadena en  $M$ . Diremos que  $\alpha$  **transforma**  $p$  **en**  $q$  ( $p \xrightarrow{\alpha} q$ ) si partiendo de  $p$  y aplicando sucesivamente los inputs  $a_0, a_1, \dots, a_n$  llegamos al estado  $q$ .

- $p \xrightarrow{\epsilon} p$  ( $\epsilon$  transforma un estado en si mismo).
- Si  $\alpha = a_0, a_1, \dots, a_n$ :
  - $p \xrightarrow{\alpha} q \equiv p \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n \xrightarrow{a_n} q$ .
- Si  $\alpha = \beta\gamma$ , donde  $\beta$  y  $\gamma$  son cadenas, entonces:
  - $p \xrightarrow{\alpha} q$  si existe  $r \in Q$  tal que  $p \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{\gamma} q$ .
- Una cadena  $\alpha$  en  $M$  es **aceptada** si transforma el estado inicial en uno final.

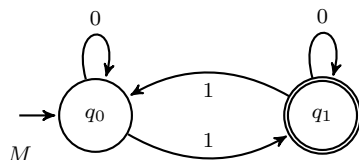
# Lenguaje de un Autómata

## Lenguaje aceptado por un autómata

Sea  $M$  un DFA, el **lenguaje aceptado por  $M$**  ( $L(M)$ ) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata.

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \text{existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

## Ejemplo 5



- ¿Cuál es lenguaje de  $M$ ?

$$L(M) = \{w \mid w \text{ tiene un nro impar de 1's}\}.$$

- ¿Cómo estamos seguros? Probando el siguiente predicado:

$$q_0 \xrightarrow{w} q_1 \text{ si y solo si } w \text{ tiene un nro. impar de 1's.}$$

- ¿Cómo se prueba? Por inducción en  $|w|$ .

# Equivalencia de Autómatas

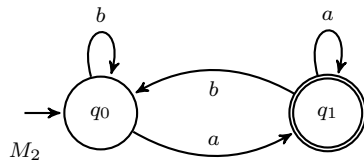
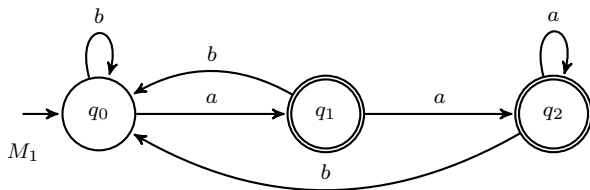
- Un autómata está caracterizado por su lenguaje.
- Podemos comparar los lenguajes de dos autómatas.
- Igualdad de lenguajes  $\rightarrow$  noción de equivalencia entre autómatas.

## Equivalencia de Autómatas

Sean  $M$  y  $M'$  dos DFA. Diremos que  $M$  y  $M'$  son equivalentes si:

$$L(M) = L(M').$$

## Ejemplo 6



- ¿ Son equivalentes  $M_1$  y  $M_2$ ?
- ¿Cuál es el lenguaje de  $M_1$ ?
- ¿Cuál es el lenguaje de  $M_2$ ?