

Autómatas Finitos No-Determinísticos (NFA)

Introducción a la Lógica y la Computación
Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba

28/10/16

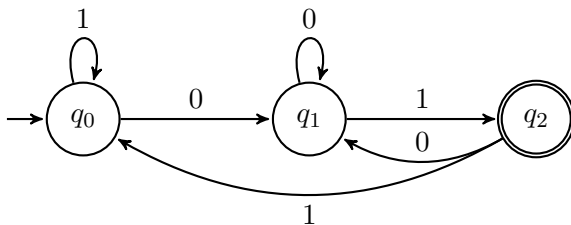
Outline

- 1 **Autómatas Finitos No-Determinísticos**
 - Intuiciones
 - Definición
 - Lenguaje de un NFA
 - Equivalencia de Lenguajes de un NFA y un DFA
 - Determinización
 - Equivalencia de Lenguajes

- 2 **Autómatas Finitos No-Determinísticos con ϵ -transiciones**
 - Definición
 - Lenguajes de un NFA- ϵ
 - Determinización
 - Equivalencia de Lenguajes

Determinismo vs. No-determinismo

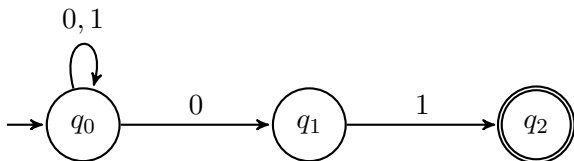
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **Determinístico:** En todo momento está en un solo estado.



- Un DFA define un lenguaje.

Determinismo vs. No-determinismo

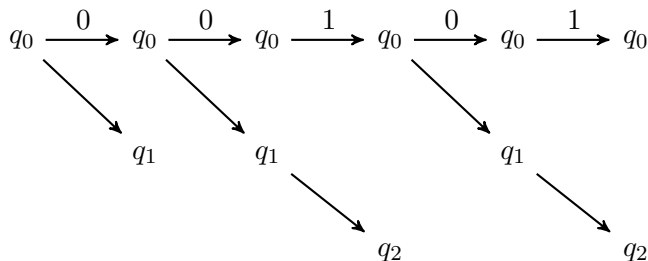
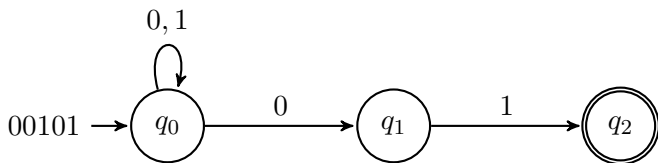
- ¿Qué pasa si permitimos 0, 1 o más transiciones por símbolo?



- ¿En qué estado está el autómata luego de $\delta(q_0, 0)$?
- El autómata está en un **conjunto de estados** al mismo tiempo.
- Ya no es *determinístico*: es **no determinístico**.

Procesando el input con no-determinismo

- En un DFA, cada símbolo transforma un estado en otro.
- ¿Cómo funciona una autómatas no-determinístico?



Definición

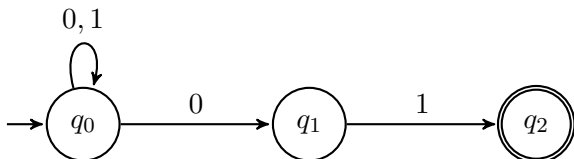
- **Autómata:** Modelo matemático de un sistema con entradas y salidas discretas.
- **Finito:** Tiene un nro. finito de estados.
- **No-Determinístico:** El autómata está en un **conjunto de estados**.

Autómata Finito No-Determinístico (NFA)

Un NFA es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un conjunto finito símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición de estados.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ son los estados finales.

Ejemplo



Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $F = \{q_2\}$.
- q_0 es el estado inicial.
- δ esta definida por:

	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	\emptyset	$\{q_2\}$
q_2	\emptyset	\emptyset

Transforma en

- Ahora trabajamos con un conjunto de estados.

Transforma en

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $\alpha = a_0, a_1, \dots, a_n \in \Sigma^*$. Diremos que α **transforma** p **en** q ($p \xrightarrow{\alpha} q$) si existen $q_1, \dots, q_n \in Q$ tal que

$$q_1 \in \delta(p, a_0), q_2 \in \delta(q_1, a_1), \dots, q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i), \dots, \\ q_n \in \delta(q_{n-1}, a_{n-1}), q \in \delta(q_n, a_n).$$

- α puede transformar q_0 en varios estados.
 - α genera distintos recorridos desde q_0 .
- α es **aceptada** si algún recorrido llega a un estado final.

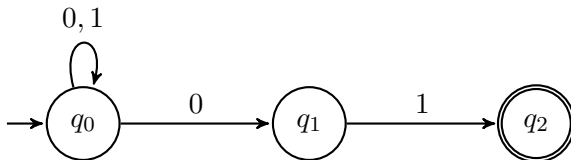
Lenguaje de un NFA

Lenguaje Aceptado por un NFA

Sea M una NFA, el **lenguaje aceptado por M** ($L(M)$) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata,

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \text{existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Ejemplo:

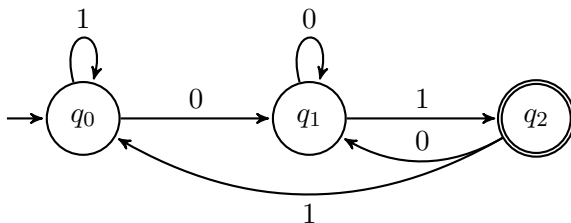


- ¿Cuál es el lenguaje del NFA?
- $L(M) = \{w \mid w \text{ termina en } 01\}$.

Intuiciones

- Los NFA son una generalización de los DFA.
- ¿Los NFA reconocen más lenguajes que los DFA?

Ejemplo:



- ¿Cuál es el lenguaje del DFA?
- $L(M) = \{w \mid w \text{ termina en } 01\}$.
- Los NFA reconocen los mismos lenguajes que los DFA.
- Para todo NFA existe un DFA equivalente.

Construcción por Subconjuntos

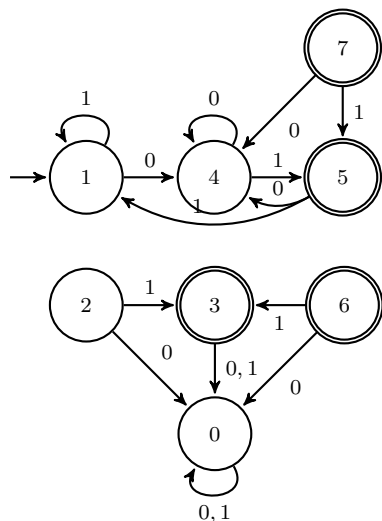
- Construyamos un DFA a partir de un NFA.

Construcción por Subconjuntos.

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Definimos el DFA $D = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ de la siguiente forma:

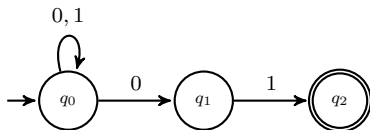
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
 - $\Sigma' = \Sigma$.
 - $F' = \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$.
 - $q'_0 = \{q_0\}$.
 - $\delta'(q', a) = \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{a} p\} = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a)$
- $\delta'(q', a)$: Estados accesibles a través de a desde cada $q \in q'$.
 - Si $|Q| = n$ entonces $|Q'| = 2^n!!!$
 - No preocuparse: no todos son accesibles.

Ejemplo



Sea $D = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$:

		0	1
(0)	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(1)	$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
(2)	$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
(3)	$* \{q_2\}$	\emptyset	\emptyset
(4)	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
(5)	$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
(6)	$* \{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
(7)	$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$



Construcción Lazy

- No todos los $2^{|Q|}$ estados son necesarios.
- Podemos ser mas eficientes en la construcción de Q' .

Construcción Lazy de Q'

Data: estado inicial q_0 , función δ , alfabeto Σ

Result: conjunto de estados Q'

$Q' \leftarrow \{\{q_0\}\};$

$Q'' \leftarrow \emptyset;$

for $q' \in (Q' \setminus Q'')$ **do**

for $a \in \Sigma$ **do**

$Q' \leftarrow Q' \cup \{\bigcup_{q \in q'} \delta(q, a)\};$

end

$Q'' \leftarrow Q'' \cup \{q'\};$

end

Equivalencia entre DFA y NFA

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \xrightarrow{\alpha} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}$

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(N)$.

Teorema

Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA.

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \xrightarrow{\alpha} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}$

Por inducción en $|\alpha|$.

Casos Base:

$|\alpha| = 0$: Si $|\alpha| = 0$ entonces $\alpha = \epsilon$ y por def. de \rightarrow , $q' \xrightarrow{\epsilon} q'$.

Q.v.q. $q' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\epsilon} p\}$.

Sea $q' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, luego, $q_i \xrightarrow{\epsilon} q_i, \forall q_i \in q'$, se sigue que $q' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\epsilon} p\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. ya que ϵ transforma todo estado en sí mismo.

$|\alpha| = 1$: Sea $\alpha = a$ con $a \in \Sigma$. Si $q' \xrightarrow{a} p'$ entonces

$p' = \{p \in Q \mid \exists q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{a} p\}$ por definición de δ' .

Paso Inductivo: Sea $\alpha = \beta a$ con $|\beta| \geq 1$ y $a \in \Sigma$. Q.v.q. si $q' \xrightarrow{\beta a} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\beta a} p\}$.

Si $q' \xrightarrow{\beta a} p'$ entonces existe r' tal que, $q' \xrightarrow{\beta} r' \xrightarrow{a} p'$.

Por HI, tenemos que

$$r' = \{r \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\beta} r\}.$$

Por el CB donde $|\alpha| = 1$ tenemos que,

$$p' = \{p \in Q \mid \text{existe } r \in r' \text{ t.q. } r \xrightarrow{a} p\}.$$

\subseteq : Si $p \in p'$ existe $r \in r'$ tq $r \xrightarrow{a} p$ y, como $r \in r'$, existe $q \in q'$ tq $q \xrightarrow{\beta} r$, y por lo tanto, $q \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{a} p \equiv q \xrightarrow{\beta a} p$ de donde se sigue que $p' \subseteq \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\beta a} p\}$.

\supseteq : Si $p \in \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\beta a} p\}$, existe $r \in Q$ t.q. $q \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{a} p$. Luego, por HI y CB, $r \in r'$ y $p \in p'$, lo cual prueba la otra inclusión.

Lema

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de N usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(N)$.

Por el lema anterior sabemos que

$$q' \xrightarrow{\alpha} \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Si instanciamos $q' = q'_0$, entonces tenemos que:

$$q'_0 \xrightarrow{\alpha} \{p \in Q \mid q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}(*).$$

\subseteq : Supongamos que $\alpha \in L(D)$. Por definición tenemos que $q'_0 \xrightarrow{\alpha} p'$ y $p' \in F'$. Como p' es estado final, tenemos que $\exists p \in p'$ t.q. $p \in F$. Luego por (*) tenemos que $q_0 \xrightarrow{\alpha} p$ y por lo tanto $\alpha \in L(N)$.

\supseteq : Supongamos que $\alpha \in L(N)$. Luego $q_0 \xrightarrow{\alpha} p$ con $p \in F$. Por (*) tenemos que $p \in p'$ y que $q'_0 \xrightarrow{\alpha} p'$. Como $p \in F$, $p' \in F'$, con lo cual $\alpha \in L(D)$.

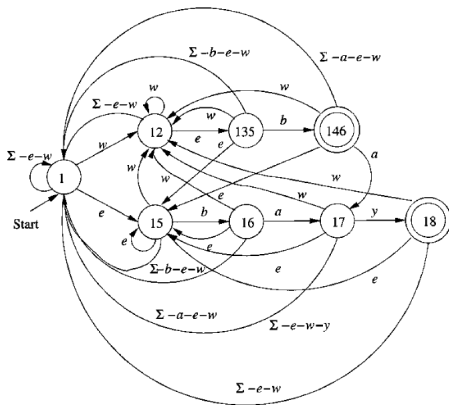
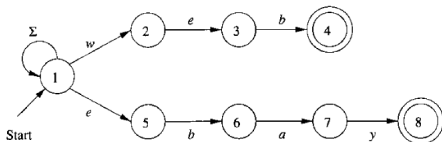
Teorema

Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA.

Q.v.q. para todo DFA D (NFA N) existe un NFA N (DFA D) tal que $L(D) = L(N)$.

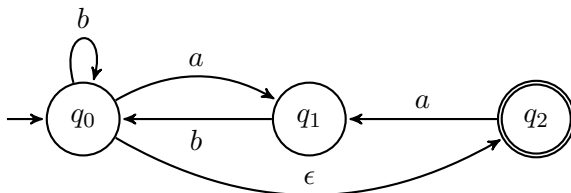
- Sea $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, luego, podemos construir un NFA $N = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ donde $\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}$. Es evidente que $L(D) = L(N)$.
- Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Luego usando la construcción por subconjuntos podemos construir un DFA D y por el Lema 2, sabemos que $L(N) = L(D)$.

Entonces, ¿para qué sirven? (Hopcroft et al)



Intuiciones

- Ahora extendamos la definición de un NFA permitiendo:
 - Transiciones mediante el símbolo ϵ (ϵ -transiciones).
 - Transiciones espontáneas.



- Agregan cierto tipo de **conveniencia programática**.

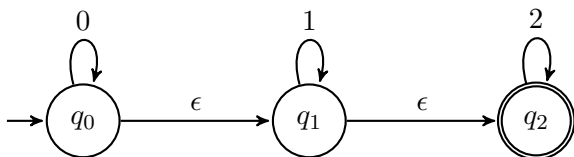
Definición

Autómata Finito No-Determinístico con ϵ -transiciones (NFA- ϵ)

Un NFA- ϵ es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un conjunto finito símbolos.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición de estados.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ son los estados finales.

Ejemplo:



Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.
- $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.
- $F = \{q_2\}$.
- q_0 es el estado inicial.

- δ esta definida por:

	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	\emptyset	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
q_2	\emptyset	\emptyset	$\{q_2\}$	\emptyset

Transforma en

Transforma en

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA- ϵ y $\alpha \in \Sigma^*$. Diremos que α **transforma** p en q ($p \xrightarrow{\alpha} q$) si existen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ y $q_1, \dots, q_n \in Q$ tal que $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n$ y

$$q_1 \in \delta(p, a_0), q_2 \in \delta(q_1, a_1), \dots, q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i), \dots, \\ q_n \in \delta(q_{n-1}, a_{n-1}), q \in \delta(q_n, a_n).$$

- Importante:
 - $q \in \delta(p, a)$ implica $p \xrightarrow{a} q$, pero,
 - $p \xrightarrow{a} q$ **no implica** $q \in \delta(p, a)$.
- $p \xrightarrow{a} q$ permite la existencia de ϵ -transiciones.
 - Ej. $p \xrightarrow{a} q \equiv p \xrightarrow{\epsilon a} q \equiv p \xrightarrow{a \epsilon} q$
- α es **aceptada** si algún recorrido llega a un estado final.

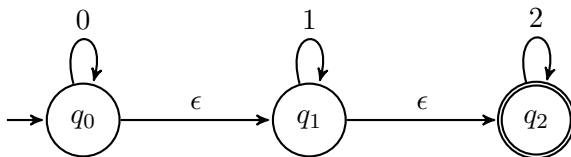
Lenguaje de un NFA- ϵ

Lenguaje Aceptado por un NFA- ϵ

Sea M un NFA- ϵ , el **lenguaje aceptado por M** ($L(M)$) es el conjunto de cadenas aceptadas por el autómata,

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \text{existe } p \in F \text{ tal que } q_0 \xrightarrow{\alpha} p\}.$$

Ejemplo:



- ¿Cuál es el lenguaje del autómata?
- $L = \{w \mid w = 0^i 1^j 2^k \text{ con } 0 \leq i, 0 \leq j, 0 \leq k\}$.

Construcción por Subconjuntos

- Las ϵ -transiciones no expanden la clase de lenguajes.

ϵ -clausura

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA- ϵ y $q \in Q$. Definimos la ϵ -clausura de q ($[q]$) como

$$[q] = \{p \in Q \mid q \xrightarrow{\epsilon} p\}.$$

Para $\{q_1, \dots, q_k\}$, definimos

$$[q_1, \dots, q_k] = \bigcup_{i=1}^k [q_i].$$

- Notar que $\epsilon = \epsilon\epsilon\epsilon\dots$
- Recordar que $q \xrightarrow{\epsilon} q$.

Construcción por Subconjuntos para NFA- ϵ

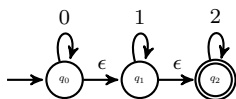
- Construyamos un DFA a partir de un NFA- ϵ .

Construcción por Subconjuntos.

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA- ϵ . Definimos el DFA $D = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ de la siguiente forma:

- $Q' = \{[q_1, \dots, q_i] \mid q_1, \dots, q_i \in Q\} \subseteq \mathcal{P}(Q)$.
- $\Sigma' = \Sigma$.
- $F' = \{[q_1, \dots, q_i] \mid [q_1, \dots, q_i] \cap F \neq \emptyset\}$.
- $q'_0 = [q_0]$.
- $\delta'(q', a) = [\{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{a} p\}]$.

Ejemplo



	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	\emptyset	\emptyset	$\{q_1\}$
q_1	\emptyset	$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
q_2	\emptyset	\emptyset	$\{q_2\}$	\emptyset

$$[\emptyset] = \emptyset$$

$$[q_0] = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$[q_1] = \{q_1, q_2\}$$

$$[q_2] = \{q_2\}$$

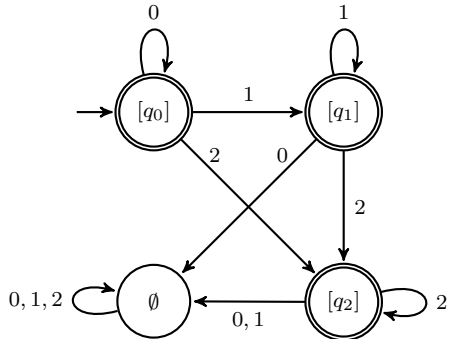
$$[q_0, q_1] = [q_0]$$

$$[q_0, q_2] = [q_0]$$

$$[q_1, q_2] = [q_1]$$

$$[q_0, q_1, q_2] = [q_0]$$

	0	1	2
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\rightarrow *$	$[q_0]$	$[q_1]$	$[q_2]$
*	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_2]$
*	$[q_2]$	\emptyset	$[q_2]$



Equivalencia entre DFA y NFA- ϵ

Lema

Sea $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA- ϵ y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de E usando la construcción por subconjuntos. Para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y todo $q' \in Q'$, si $q' \xrightarrow{\alpha} p'$ entonces $p' = \{p \in Q \mid \text{existe } q \in q' \text{ t.q. } q \xrightarrow{\alpha} p\}$.

Lema

Sea $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA- ϵ y $D = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ el DFA obtenido a partir de E usando la construcción por subconjuntos. Luego $L(D) = L(E)$.

Teorema

Los lenguajes aceptados por los DFA son los mismos que los aceptados por los NFA- ϵ .