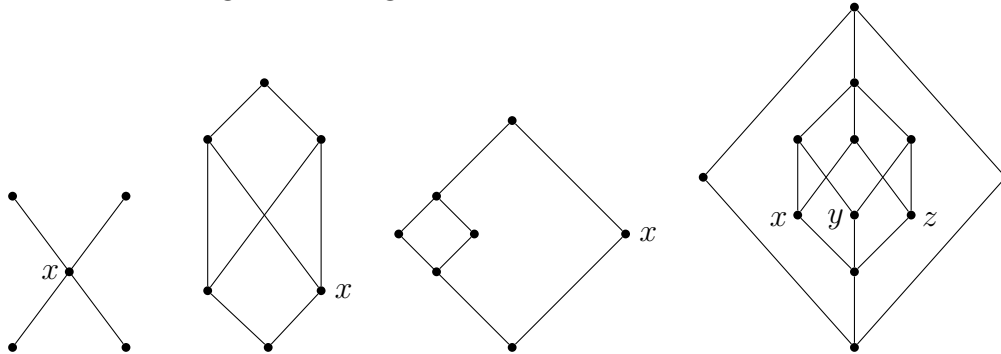


Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden  
14/09/2016, Práctico 9: Repaso.

**Objetivos.** Repasar los conceptos de: poset, maximales y máximos (dualmente minimales y mínimos), la relación de cobertura para un poset; supremos e ínfimos; reticulados; complementos en reticulados acotados; subreticulados; átomos e irreducibles; reticulados distributivos.

1. Considere los siguientes diagramas:



- a) ¿Cuáles representan reticulados?
  - b) ¿Cuáles son los elementos maximales en cada uno?
  - c) ¿Cuáles cubren al elemento  $x$ ?
  - d) ¿Cuáles son los complementos de  $x$ ?
  - e) ¿Existe  $\sup\{x, y, z\}$ ? Si existe indique cuál es.
2. Diga si es Verdadero o Falso. Justifique su afirmación.
- a) En todo poset, si  $x \not\leq y$  entonces  $y \leq x$ .
  - b) En todo poset, un elemento mínimo es también minimal.
  - c) En todo poset  $P$ , cada  $S \subseteq P$  tiene a lo sumo un supremo.
  - d) Si el reticulado es distributivo, todos los elementos tienen complemento.
  - e) Sea  $L'$  subreticulado de  $L$  y  $x, y, z \in L$  tales que  $x \leq y \leq z$ . Si  $x, z \in L'$  entonces  $y \in L'$ .
  - f) Existe un reticulado tal que  $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ , para algunos  $x, y$  y  $z$ .
  - g) Si en un reticulado todos los elementos irreducibles son átomos, entonces el reticulado es distributivo.
3. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 4 elementos irreducibles, donde al menos 3 de ellos sean átomos.
4. a) Dé los diagramas de Hasse de  $D_{61}$ ,  $D_{62}$ ,  $D_{63}$  y  $D_{64}$ .  
 b) En cada caso, señale los átomos y los elementos irreducibles.  
 c) Dé el diagrama de Hasse de  $\mathcal{D}(Irr(D_{63}))$ .  
 d) En cada caso encuentre el menor natural  $n$  tal que el reticulado sea isomorfo a  $D_n$ .  
 e) En los casos en que exista, encuentre  $X$  tal que el reticulado  $D_n$  sea isomorfo a  $\mathcal{P}(X)$ .
5. a) Defina el concepto de poset reticulado.  
 b) Pruebe que en todo reticulado vale la desigualdad:  

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
  
 c) Sea  $L$  un reticulado distributivo finito. Pruebe que si  $x = \sup(D)$ , donde  $D$  es un conjunto decreciente de irreducibles, entonces  $D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$ .