

Parte II: Lógica Proposicional

5 de octubre de 2015

El conjunto *Prop*

- Hace un par de semanas definimos la sintaxis de la lógica proposicional, el conjunto *Prop*.
- Definición de funciones por recursión.
- Prueba de propiedades sobre *Prop* utilizando inducción.

Semántica

- Las asignaciones son funciones en $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$.
- Dada $f: \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$, tenemos $\llbracket - \rrbracket_f: Prop \rightarrow \{0, 1\}$.
- Una proposición P es tautología si para toda asignación f , $\llbracket P \rrbracket_f = 1$.
- Una asignación f es de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $Q \in \Gamma$, $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$.
- Decimos que P es consecuencia lógica de Γ , $\Gamma \models P$, si para toda f de Γ , se da que $\llbracket P \rrbracket_f = 1$.

y los razonamientos correctos?

- La primera clase dijimos que la lógica es el estudio de los razonamientos lógicos.
- Pero hasta ahora no introdujimos ningún mecanismo para deducir conclusiones válidas a partir de premisas válidas.
- Esta es nuestra tarea ahora.

Inferencia

- Un razonamiento correcto es aquel que partiendo de ciertas *hipótesis* o de conocimientos previos produce nuevos conocimientos.
- Para asegurarnos que las conclusiones son válidas debemos restringir las formas (las inferencias) en que producimos las conclusiones a partir de ciertas premisas.
- Lo que vamos a dar a continuación es una serie de *reglas de inferencia* que nos aseguran que los razonamientos hechos usando esas reglas (y solo esas) son correctos.
- Por ahora nos vamos a restringir a los siguientes conectivos: \wedge , \rightarrow , \perp . Y establecemos que la conjunción tiene mayor precedencia que la implicación.

Reglas de inferencia

- Una regla de inferencia será una tripla (nombre, $\{P_1, \dots, P_n\}$, Q), donde el primer elemento es el nombre de la regla, el segundo un conjunto finito de proposiciones que representan las premisas, y el último elemento es la conclusión.
- Podemos representar gráficamente a una regla de la siguiente manera:

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n}{Q} \text{ nombre}$$

- Recordemos que tanto las P_i como Q son metavariables que pueden ser reemplazadas por cualquier proposición.

Reglas para la Conjunción

- Si conocemos (las asumimos como hipótesis o ya tenemos una prueba) P y Q , entonces podemos concluir $P \wedge Q$.
- La regla formal se llama introducción de la conjunción:

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \wedge I$$

- Un ejemplo concreto del uso de esta regla es la siguiente prueba:

$$\frac{p_1 \quad p_2}{p_1 \wedge p_2} \wedge I$$

- ¿Nos dice esa prueba que $p_1 \wedge p_2$ es válido?
- No! Nos dice que de la validez de p_1 y la validez de p_2 se sigue la validez de $p_1 \wedge p_2$.

Reglas para la Conjunción

- De saber $P \wedge Q$ podemos deducir tanto P como Q .
- Tenemos entonces dos reglas para utilizar el conocimiento de una conjunción.
- La primera regla se llama eliminación de la conjunción:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$$

- La segunda regla, que la llamamos con el mismo nombre, es:

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \wedge E$$

Ejemplos

- ¿Podemos derivar la validez de R a partir de la validez de $P \wedge (Q \wedge R)$?
- Si decimos que sí, debemos poder construir una prueba, una *derivación*, donde podemos usar varias veces las reglas de inferencia:

$$\frac{\frac{P \wedge (Q \wedge R)}{Q \wedge R} \wedge E}{R} \wedge E$$

- A partir de ahora, usaremos la expresión existe una *derivación de R a partir de $P \wedge (Q \wedge R)$* .

Ejemplos

- ¿Podemos construir una derivación de $P \wedge (Q \rightarrow Q)$ a partir de P y $(Q \rightarrow Q) \wedge R$? (Notar que tenemos varias premisas)

$$\frac{P \quad \frac{(Q \rightarrow Q) \wedge R}{Q \rightarrow Q} \wedge E}{P \wedge (Q \rightarrow Q)} \wedge I$$

- Tanto en esta prueba como en la anterior, utilizamos la conclusión de una prueba como premisa para el uso de otra regla.

Premisas y conclusión

- Llamamos *premisas* a todas las proposiciones que no fueron obtenidas como conclusión de una prueba.
- En el último ejemplo, las premisas son P y $(Q \rightarrow Q) \wedge R$.
- Llamamos *conclusión* a la proposición que está en la raíz del árbol.
- A veces queremos referirnos a una derivación de Q a partir de la premisa P , entre otras:

$$\begin{array}{c} P \\ \vdots D \\ Q \end{array}$$

- En este caso D es el nombre de la derivación.
- Entre las premisas de D está P ; esto significa que esa proposición se ha utilizado 0, 1 o muchas veces (sin necesidad de tener una prueba con conclusión P).

Implicación

- Si D es una derivación de Q a partir de P , entonces D debería contar como una derivación de $P \rightarrow Q$.
- Pero cuando utilizamos la implicación (pensemos en el uso de “si . . . , entonces . . .”), queremos decir “si tuviéramos una prueba de P ”.
- No queremos obligarnos a tener una prueba de P , al menos hasta que querramos usar la implicación.
- Vemos entonces que cuando introducimos la implicación, quitamos la carga de la prueba sobre el antecedente.

Implicación

- Formalmente la regla de introducción de la implicación es:

$$\frac{[P] \quad \vdots \quad Q}{P \rightarrow Q} \rightarrow I$$

- Aquí hay una diferencia con las anteriores reglas porque encorchetamos hojas donde esté P , si queremos.
- Esa es la manera en que indicamos que *descargamos* (o *cancelamos*) la hipótesis P .

Ejemplo

$$\frac{\frac{[P \wedge Q]_1}{Q} \wedge E \quad \frac{[P \wedge Q]_1}{P} \wedge E}{Q \wedge P} \wedge I}{(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)} \rightarrow I_1$$

- Como podemos utilizar varias veces la regla $\rightarrow I$, marcamos con un sub-índice aquellas hipótesis que cancelamos con cada uso de la regla.

Implicación

- La regla de eliminación de la implicación (¿cómo puedo usar una implicación?) es la conocida *modus ponens*:

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E$$

- Si definimos $\neg P$ como abreviatura de $P \rightarrow \perp$, entonces:

$$\frac{\frac{[P]_3 \quad P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E \quad \neg Q}{\perp} \rightarrow E \quad \frac{\perp}{\neg P} \rightarrow I_3$$

- En esta derivación, tenemos que las hipótesis no canceladas son $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$.
- Pero podemos continuar con la derivación y cancelar todas las hipótesis.

Ejemplo

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]_3 \quad [P \rightarrow Q]_1}{Q} \rightarrow E \quad [\neg Q]_2 \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg P} \rightarrow I_3 \\
 \frac{\quad}{\neg Q \rightarrow \neg P} \rightarrow I_2 \\
 \hline
 (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow I_1
 \end{array}$$

Bottom

- Para \perp no tenemos regla de introducción. ¿Por qué?
- Sin embargo, siempre que tengamos una prueba de \perp , podemos concluir lo que se nos antoje: “ex falso quodlibet”.

$$\frac{\perp}{P} \perp E$$

- Ejemplo, recordemos que $\neg P$ es $P \rightarrow \perp$:

$$\frac{\frac{P \quad \neg P}{\perp} \perp E}{Q} \rightarrow E$$

- Es decir, podemos construir una derivación de Q a partir de P y $\neg P$.