

## Parte II: Lógica Proposicional

19 de octubre de 2016

# Semántica

- Las asignaciones son funciones en  $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ .

# Semántica

- Las asignaciones son funciones en  $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Dada una asignación  $f$ , definimos la semántica  $\llbracket - \rrbracket_f: Prop \rightarrow \{0, 1\}$ .

# Semántica

- Las asignaciones son funciones en  $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Dada una asignación  $f$ , definimos la semántica  $\llbracket - \rrbracket_f: Prop \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Una proposición  $P$  es tautología si para toda asignación  $f$ ,  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

# Semántica

- Las asignaciones son funciones en  $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Dada una asignación  $f$ , definimos la semántica  $\llbracket - \rrbracket_f: Prop \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Una proposición  $P$  es tautología si para toda asignación  $f$ ,  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .
- Una asignación  $f$  es de  $\Gamma \subseteq Prop$ , si para toda  $Q \in \Gamma$ ,  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ .

# Semántica

- Las asignaciones son funciones en  $\mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Dada una asignación  $f$ , definimos la semántica  $\llbracket - \rrbracket_f: Prop \rightarrow \{0, 1\}$ .
- Una proposición  $P$  es tautología si para toda asignación  $f$ ,  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .
- Una asignación  $f$  es de  $\Gamma \subseteq Prop$ , si para toda  $Q \in \Gamma$ ,  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ .
- Decimos que  $P$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$ ,  $\Gamma \models P$ , si para toda  $f$  de  $\Gamma$ , se da que  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

# Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.

# Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.
- Reglas de inferencia para construir derivaciones a partir de hipótesis.



# Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.
- Reglas de inferencia para construir derivaciones a partir de hipótesis.
- Definición por inducción del conjunto  $\mathcal{D}$  de derivaciones.

## Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.
- Reglas de inferencia para construir derivaciones a partir de hipótesis.
- Definición por inducción del conjunto  $\mathcal{D}$  de derivaciones.
- Decimos que  $Q$  se deduce de  $\Gamma$ ,  $\Gamma \vdash Q$ , si existe una derivación  $D$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$  y  $concl(D) = Q$ .

## Deducción natural

- Necesidad de formalizar los esquemas de razonamiento válido.
- Reglas de inferencia para construir derivaciones a partir de hipótesis.
- Definición por inducción del conjunto  $\mathcal{D}$  de derivaciones.
- Decimos que  $Q$  se deduce de  $\Gamma$ ,  $\Gamma \vdash Q$ , si existe una derivación  $D$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$  y  $concl(D) = Q$ .
- Pero, realmente las reglas nos permiten concluir proposiciones verdaderas a partir de hipótesis verdaderas?

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Lo primero que nos podemos preguntar es ¿cómo expresar más formalmente que de premisas válidas se deducen conclusiones válidas?

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Lo primero que nos podemos preguntar es ¿cómo expresar más formalmente que de premisas válidas se deducen conclusiones válidas?
- De los siguientes pares de afirmaciones ¿cuáles son correctos?

$$\begin{array}{cc} \{p_0, p_1\} \vdash p_2 & \{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \\ \vdash \perp & \not\vdash \perp \end{array}$$

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Lo primero que nos podemos preguntar es ¿cómo expresar más formalmente que de premisas válidas se deducen conclusiones válidas?
- De los siguientes pares de afirmaciones ¿cuáles son correctos?

$$\{p_0, p_1\} \vdash p_2 \quad \{p_0, p_1\} \not\vdash p_2$$

$$\vdash \perp \quad \not\vdash \perp$$

- ¿Podemos revisar todas las derivaciones para concluir que las primeras afirmaciones son imposibles?

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Lo primero que nos podemos preguntar es ¿cómo expresar más formalmente que de premisas válidas se deducen conclusiones válidas?
- De los siguientes pares de afirmaciones ¿cuáles son correctos?

$$\begin{array}{cc} \{p_0, p_1\} \vdash p_2 & \{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \\ \vdash \perp & \not\vdash \perp \end{array}$$

- ¿Podemos revisar todas las derivaciones para concluir que las primeras afirmaciones son imposibles?
- Y de estos pares que siguen, cuáles son correctos?

$$\begin{array}{cc} \{p_0, p_1\} \models p_2 & \{p_0, p_1\} \not\models p_2 \\ \models \perp & \not\models \perp \end{array}$$

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?



## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,
- o bien mostrar que no existe ninguna derivación con la conclusión esperada y las hipótesis permitidas.

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,
- o bien mostrar que no existe ninguna derivación con la conclusión esperada y las hipótesis permitidas.
- Pero no podemos examinar todas las derivaciones, puesto que son infinitas.

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,
- o bien mostrar que no existe ninguna derivación con la conclusión esperada y las hipótesis permitidas.
- Pero no podemos examinar todas las derivaciones, puesto que son infinitas.
- Por ejemplo, como podemos estar seguros que no podemos concluir  $\perp$  utilizando una regla de eliminación o *RAA*?

## Corrección

- ¿Cómo podemos expresar que las reglas de inferencia sólo nos permiten concluir consecuencias válidas (a partir de hipótesis válidas)?

# Corrección

- ¿Cómo podemos expresar que las reglas de inferencia sólo nos permiten concluir consecuencias válidas (a partir de hipótesis válidas)?
- Si pensamos que la validez de las fórmulas está dada por su semántica, entonces podemos utilizar la noción de  $\models$  para expresar la corrección.

## Corrección

- ¿Cómo podemos expresar que las reglas de inferencia sólo nos permiten concluir consecuencias válidas (a partir de hipótesis válidas)?
- Si pensamos que la validez de las fórmulas está dada por su semántica, entonces podemos utilizar la noción de  $\models$  para expresar la corrección.
- Una derivación  $D \in \mathcal{D}$  con  $hip(D) \subseteq \Gamma$  y  $concl(D) = Q$  es correcta si para toda asignación  $f$  de  $\Gamma$  se da  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ .



## Corrección

- ¿Cómo podemos expresar que las reglas de inferencia sólo nos permiten concluir consecuencias válidas (a partir de hipótesis válidas)?
- Si pensamos que la validez de las fórmulas está dada por su semántica, entonces podemos utilizar la noción de  $\models$  para expresar la corrección.
- Una derivación  $D \in \mathcal{D}$  con  $hip(D) \subseteq \Gamma$  y  $concl(D) = Q$  es correcta si para toda asignación  $f$  de  $\Gamma$  se da  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ .
- Nuestro trabajo será mostrar que toda derivación es correcta.

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a la pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a la pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

- Si suponemos que existe una derivación para  $\{p_0, p_1\} \vdash p_2$ , entonces para toda asignación  $f$  de  $\{p_0, p_1\}$ , tendríamos  $\llbracket p_2 \rrbracket_f = 1$ .

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a la pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

- Si suponemos que existe una derivación para  $\{p_0, p_1\} \vdash p_2$ , entonces para toda asignación  $f$  de  $\{p_0, p_1\}$ , tendríamos  $\llbracket p_2 \rrbracket_f = 1$ .
- Sin embargo la siguiente asignación es un contraejemplo:

$$f p_0 = 1$$

$$f p_1 = 1$$

$$f p_j = 0 \quad \text{para } j > 1$$

## Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a la pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \not\vdash p_2 \quad \text{y} \quad \not\vdash \perp$$

- Si suponemos que existe una derivación para  $\{p_0, p_1\} \vdash p_2$ , entonces para toda asignación  $f$  de  $\{p_0, p_1\}$ , tendríamos  $\llbracket p_2 \rrbracket_f = 1$ .
- Sin embargo la siguiente asignación es un contraejemplo:

$$f p_0 = 1$$

$$f p_1 = 1$$

$$f p_j = 0 \quad \text{para } j > 1$$

- Por lo tanto, estamos en una contradicción y la derivación que supusimos no puede existir.

## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.

## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.
- Sea  $D \stackrel{\cdot}{\vdots} Q$ , entonces  $A(D)$  vale si y solo si  
 “para todo  $\Gamma$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$ , se da  $\Gamma \models Q$ ”.

## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.
- Sea  $D \frac{\vdots}{Q}$ , entonces  $A(D)$  vale si y solo si  
 “para todo  $\Gamma$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$ , se da  $\Gamma \models Q$ ”.
- Por ejemplo, si  $D$  es la derivación  $\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$ , entonces  $A(D)$  vale.



## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.
- Sea  $D \frac{\vdots}{Q}$ , entonces  $A(D)$  vale si y solo si  
 “para todo  $\Gamma$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$ , se da  $\Gamma \models Q$ ”.
- Por ejemplo, si  $D$  es la derivación  $\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$ , entonces  $A(D)$  vale.
- Tomemos  $\Gamma$  tal que  $P \wedge Q \in \Gamma$ , comprobemos  $\Gamma \models P$ .

## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.
- Sea  $D \frac{\vdots}{Q}$ , entonces  $A(D)$  vale si y solo si  
 “para todo  $\Gamma$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$ , se da  $\Gamma \models Q$ ”.
- Por ejemplo, si  $D$  es la derivación  $\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$ , entonces  $A(D)$  vale.
- Tomemos  $\Gamma$  tal que  $P \wedge Q \in \Gamma$ , comprobemos  $\Gamma \models P$ .
- Para ello tomemos una asignación arbitraria  $f$  de  $\Gamma$  y verifiquemos  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado  $A$  sobre derivaciones.
- Sea  $D \frac{\vdots}{Q}$ , entonces  $A(D)$  vale si y solo si  
 “para todo  $\Gamma$  tal que  $hip(D) \subseteq \Gamma$ , se da  $\Gamma \models Q$ ”.
- Por ejemplo, si  $D$  es la derivación  $\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$ , entonces  $A(D)$  vale.
- Tomemos  $\Gamma$  tal que  $P \wedge Q \in \Gamma$ , comprobemos  $\Gamma \models P$ .
- Para ello tomemos una asignación arbitraria  $f$  de  $\Gamma$  y verifiquemos  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .
- Como  $f$  es de  $\Gamma$  y  $P \wedge Q \in \Gamma$ , entonces  $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_f = 1$ , por lo tanto  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección

### Teorema

*Si  $\Gamma \vdash Q$ , entonces  $\Gamma \models Q$ .*

## Teorema de corrección

### Teorema

Si  $\Gamma \vdash Q$ , entonces  $\Gamma \models Q$ .

(*Prop*) Sea  $D$  la derivación  $P$  y sea  $\{P\} \subseteq \Gamma$ , es inmediato  $\Gamma \models P$ .

# Teorema de corrección

## Teorema

Si  $\Gamma \vdash Q$ , entonces  $\Gamma \models Q$ .

(Prop) Sea  $D$  la derivación  $P$  y sea  $\{P\} \subseteq \Gamma$ , es inmediato  $\Gamma \models P$ .

( $\wedge E$ ) Sea  $D$  la derivación  $D' \frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$

Puesto que  $D'$  es la subderivación de  $D$ , entonces podemos asumir la hipótesis inductiva para  $D'$ :

para todo  $\Gamma' \supseteq \text{hip}(D')$ , se da  $\Gamma' \models P \wedge Q$ .

Para mostrar  $A(D)$ , tomamos  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D)$  y probamos  $\Gamma \models P$ . Sea  $f$  una asignación arbitraria de  $\Gamma$ , veamos  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

Como  $\text{hip}(D) = \text{hip}(D')$ , para  $\Gamma$  tenemos  $\Gamma \models P \wedge Q$ , es decir  $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_f = 1$ . De lo cual concluimos  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección, cont.

( $\wedge I$ ) Sea  $D$  la derivación 
$$\frac{D_1 \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \quad D_2 \begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \wedge I$$
, veamos  $A(D)$ .

Como antes, aumimos la h.i. tanto para  $D_1$

para todo  $\Gamma_1 \supseteq \text{hip}(D_1)$ ,  $\Gamma_1 \models P$

como para  $D_2$

para todo  $\Gamma_2 \supseteq \text{hip}(D_2)$ ,  $\Gamma_2 \models Q$

Sea  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D)$  y sea  $f$  una asignación de  $\Gamma$ . Como  $\text{hip}(D_i) \subseteq \text{hip}(D) \subseteq \Gamma$ , tenemos, aplicando la h.i. en  $D_1$ ,  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$  y, análogamente usando la h.i. en  $D_2$  sabemos  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ . Por lo tanto, tenemos  $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección, cont.

$$\begin{array}{c}
 [P] \\
 (\rightarrow I) \text{ Sea } D \text{ la derivación } \begin{array}{c} \vdots \\ D' \quad Q \end{array} . \\
 \frac{\quad}{P \rightarrow Q} \rightarrow I
 \end{array}$$

En este caso asumimos que la h.i. vale para  $D'$ :  
 para todo  $\Gamma' \supseteq \text{hip}(D_1)$ ,  $\Gamma' \models Q$ .

Tomemos  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D)$  y  $f$  una asignación de  $\Gamma$ , probemos  $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_f = 1$ , es decir  $\text{máx}(1 - \llbracket P \rrbracket_f, \llbracket Q \rrbracket_f) = 1$ .

Como  $\text{hip}(D) = \text{hip}(D') \setminus \{P\}$ , que  $f$  sea de  $\Gamma$  no nos dice nada sobre el valor de  $\llbracket P \rrbracket_f$ . Si  $\llbracket P \rrbracket_f = 0$ , entonces  $\text{máx}(1 - \llbracket P \rrbracket_f, \llbracket Q \rrbracket_f) = \text{máx}(1 - 0, \llbracket Q \rrbracket_f) = 1$ .

El otro caso es si  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ ; pero ahora  $f$  es una asignación de  $\Gamma \cup \{P\}$ ; usando la hipótesis inductiva en  $D'$ , con  $\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$ , deducimos  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ . De lo cual concluimos  $\text{máx}(1 - \llbracket P \rrbracket_f, \llbracket Q \rrbracket_f) = \text{máx}(1 - \llbracket P \rrbracket_f, 1) = 1$ .



## Teorema de corrección, cont.

( $\rightarrow E$ ) Sea  $D$  la derivación 
$$\frac{D_1 \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \quad D_2 \begin{array}{c} \vdots \\ P \rightarrow Q \end{array}}{Q} \rightarrow E$$
.

En este caso asumimos la h.i. sobre  $D_1$  y sobre  $D_2$ .

Sea  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D)$ , entonces  $\Gamma \supseteq D_i$ . Sea  $f$  una asignación de  $\Gamma$ ; por h.i., entonces  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$  y también  $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_f = 1$ .

Es decir  $1 = \text{máx}(1 - \llbracket P \rrbracket_f, \llbracket Q \rrbracket_f) = \text{máx}(0, \llbracket Q \rrbracket_f)$ ; por lo tanto,  $\llbracket Q \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección, cont.

(*RAA*) Sea  $D$  la derivación

$$D' \begin{array}{c} \vdots \\ \perp \\ P \end{array} \frac{RAA}{\perp} .$$

Ahora podemos asumir la h.i. para  $D'$ :

para todo  $\Gamma' \supseteq \text{hip}(D')$ ,  $\Gamma' \models \perp$  !

Sea  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D') \setminus \{\neg P\}$  y sea  $f$  una asignación de  $\Gamma$ .

Veamos  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

Supongamos que para toda  $f$  de  $\Gamma$ , tenemos  $\llbracket P \rrbracket_f = 0$ . Es decir,  $\llbracket \neg P \rrbracket_f = 1$ ; por lo tanto  $f$  es de  $\Gamma \cup \{\neg P\}$ .

Eso nos permite utilizar la h.i. sobre  $D'$  y concluir  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto se debe dar  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

## Teorema de corrección, cont.

( $\perp E$ ) Sea  $D$  la derivación  $D' \frac{\perp}{P} \perp E$

En este caso asumimos la h.i. sobre  $D'$ .

Sea  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D)$ , entonces  $\Gamma \supseteq \text{hip}(D')$ . Sea  $f$  una asignación de  $\Gamma$ ; por h.i., entonces  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$ .

Lo último es absurdo y fácilmente podemos concluir  $\llbracket P \rrbracket_f = 1$ .

## Repaso

- Ahora podemos probar  $\not\vdash \perp$ : Supongamos que  $\vdash \perp$ , entonces para toda asignación  $f$  tenemos  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$  por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión  $\perp$  y todas sus hipótesis canceladas.

## Repaso

- Ahora podemos probar  $\not\vdash \perp$ : Supongamos que  $\vdash \perp$ , entonces para toda asignación  $f$  tenemos  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$  por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión  $\perp$  y todas sus hipótesis canceladas.
- El teorema de corrección nos asegura que todo lo derivable es una tautología.

## Repaso

- Ahora podemos probar  $\not\vdash \perp$ : Supongamos que  $\vdash \perp$ , entonces para toda asignación  $f$  tenemos  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$  por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión  $\perp$  y todas sus hipótesis canceladas.
- El teorema de corrección nos asegura que todo lo derivable es una tautología.
- Pero... sucederá lo recíproco? Es decir, podremos derivar todas las tautologías?

## Repaso

- Ahora podemos probar  $\not\vdash \perp$ : Supongamos que  $\vdash \perp$ , entonces para toda asignación  $f$  tenemos  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$  por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión  $\perp$  y todas sus hipótesis canceladas.
- El teorema de corrección nos asegura que todo lo derivable es una tautología.
- Pero... sucederá lo recíproco? Es decir, podremos derivar todas las tautologías?
- En términos más generales: si  $\Gamma \models P$ , entonces  $\Gamma \vdash P$ ?

## Repaso

- Ahora podemos probar  $\not\vdash \perp$ : Supongamos que  $\vdash \perp$ , entonces para toda asignación  $f$  tenemos  $\llbracket \perp \rrbracket_f = 1$  por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión  $\perp$  y todas sus hipótesis canceladas.
- El teorema de corrección nos asegura que todo lo derivable es una tautología.
- Pero... sucederá lo recíproco? Es decir, podremos derivar todas las tautologías?
- En términos más generales: si  $\Gamma \models P$ , entonces  $\Gamma \vdash P$ ?
- Es decir, se podrán hacer todas las derivaciones de premisas válidas a conclusiones válidas.