

Introducción a la Lógica y la Computación

Parte III: Lenguajes y Autómatas

Clase del 15 de Noviembre de 2017

En esta tercera parte de la materia, hasta ahora vimos:

- ▶ Autómatas Determinísticos, Autómatas No Determinísticos.
- ▶ Expresiones Regulares, Gramáticas Regulares.
- ▶ Equivalencias entre todos los formalismos para representar lenguajes regulares:

$GR \Rightarrow NFA \Rightarrow AFD \Rightarrow ER \Rightarrow GR$

- ▶ Jerarquía de Lenguajes: no todos los lenguajes son regulares.
- ▶ Vimos algunos ejemplos que nos resultan interesantes donde necesitamos lenguajes que no son regulares.
- ▶ Bajamos un poco las restricciones: lenguajes libres de contexto (más expresividad).
- ▶ Gramáticas Libres de Contexto.

Lenguajes Libres de Contexto

- ▶ Hemos visto una forma de representar lenguajes libres de contexto (gramáticas).
- ▶ Para lenguajes regulares, había varios formalismos (algunos relacionados con la teoría de máquinas abstractas).
- ▶ Podemos pensar que hay otros formalismos para representar lenguajes libres de contexto.
- ▶ Vamos a ver un tipo particular de autómatas: **Autómatas con Pila** (o en inglés, *pushdown automata*).

Autómatas con Pila

- ▶ Un Autómata con Pila, es un autómata finito que posee control sobre una pila.
- ▶ Es decir, solo puede “leer”, “poner” o “sacar” el primer elemento.
- ▶ Dado el estado actual del autómata y el primer elemento de la pila, un símbolo de input nos llevará (posiblemente en forma no determinística) el estado siguiente y a la modificación que se debe hacer en el primer elemento de la pila.

Autómatas con Pila - Aceptación de una cadena

- ▶ Diremos que una cadena es aceptada por *pila vacía* por el autómata con pila si cuando la aplicamos obtenemos una pila vacía.
- ▶ Diremos que una cadena es aceptada por *estado final* por el autómata con pila si lleva el estado inicial a uno final.
- ▶ Los lenguajes aceptados por los autómatas con pila (tanto los aceptados por pila vacía o por estado final) son los mismos que los aceptados por las gramáticas libres de contexto e incluyen estrictamente a los lenguajes regulares.

Consideremos el siguiente lenguaje L (no regular, demostrar con Pumping Lemma) sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1, c\}$:

$$L = \{\alpha c \alpha^R \mid \alpha \in (0 + 1)^*\},$$

donde \cdot^R indica la reversa de una cadena.

Sin embargo, es un lenguaje libre de contexto generado por la gramática

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid c.$$

Vamos a mostrar un autómata con pila cuyo lenguaje por pila vacía es L .

- ▶ Los símbolos de input serán 0, 1 y c .
- ▶ Consideremos dos estados q_1 y q_2 y que en la pila se pueden apilar tres tipos de objetos: rojos (R), verdes (V) y azules (A).
- ▶ Apilamos un elemento R para indicar el comienzo de la pila.
- ▶ Usamos la pila como “memoria”: cada vez que el input es 0, apilamos una A , cada vez que es un 1, apilamos una V (sin cambiar el estado inicial).
- ▶ Cuando ingresa el input c , cambiamos de estado para indicar que tenemos que empezar a leer el final de la palabra.
- ▶ Ahora deberemos desapilar convenientemente, de tal forma que si después de c viene a^R la pila quede vacía.
- ▶ El último movimiento, un movimiento ϵ , se define de la siguiente manera: si estamos en el segundo estado y la pila muestra el R , se saca el R .

Resumiendo: el autómata tendrá las siguientes reglas:

1. Comenzamos en el estado q_1 y con R en la pila.
2. En el caso en que el estado es q_1 el autómata actúa de la siguiente manera. Si se ingresa el símbolo de input 0, agregamos a la pila una A . Si el símbolo de input es 1 agregamos una V . En ambos casos el estado permanece en q_1 . Si la entrada es c pasamos al estado q_2 y la pila no cambia.
3. En el caso en que el estado es q_2 el autómata actúa de la siguiente manera. Si se ingresa el símbolo de input 0 y el primero de la pila es A , se retira el primer elemento de la pila (es decir la A). Si el símbolo de input es 1 y el primero de la pila es V , se retira el primer elemento de la pila. Si el primer elemento de la pila es R , se lo retira sin esperar input. En todos los casos el estado continúa siendo q_2 .
4. En las situaciones no contempladas en los items anteriores, el autómata no hace nada.

Autómatas con Pila - Definición Formal

Definición

Un autómata con pila es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, donde:

1. Q es un conjunto finito de estados.
2. Σ es el alfabeto de entrada.
3. Γ es el alfabeto de la pila.
4. $q_0 \in Q$ el estado inicial.
5. $Z_0 \in \Gamma$ el símbolo inicial de la pila.
6. $F \subset Q$ el conjunto de estados finales.
7. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$, donde $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$ indica los subconjuntos finitos de $Q \times \Gamma^*$.

Observación: Si tenemos $\delta(q, a, Z) = \{(p, \gamma)\}$ esto significa que si el estado actual es q y el tope de la pila es Z , cuando el input es a el estado del autómata cambia a p y en la pila se produce el reemplazo de Z por γ , quedando el primer símbolo de γ como tope de la pila.

Autómatas con Pila - Ejemplo

Describamos de manera formal el ejemplo que vimos antes:

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{V, A, R\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$, donde δ está definida como:

$$\begin{aligned}\delta(q_1, 0, X) &= \{(q_1, AX)\} & \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, VX)\} \\ \delta(q_1, c, X) &= \{(q_2, X)\} & \delta(q_2, 0, A) &= \{(q_2, \epsilon)\} \\ \delta(q_2, 1, V) &= \{(q_2, \epsilon)\} & \delta(q_2, \epsilon, R) &= \{(q_2, \epsilon)\}\end{aligned}$$

X es un símbolo arbitrario de la pila. Las demás transiciones son $\delta(q, a, Z) = \emptyset$.

Autómatas con Pila - Configuraciones

Dado un autómata de pila, vamos a describir formalmente la situación después de consumir (parte de) una cadena.

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un autómata con pila, una configuración (o descripción instantánea) es una tripla (q, ω, γ) , tal que $q \in Q$, $\omega \in \Sigma^*$ y $\gamma \in \Gamma^*$.

Si $(q, a\omega, Z\gamma)$ y $(p, \omega, \beta\gamma)$ son dos configuraciones, denotaremos $(q, a\omega, Z\gamma) \vdash (p, \omega, \beta\gamma)$ si $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$.

$(q, a, \gamma) \vdash^* (q', a', \gamma')$ si existen $(q_1, a_1, \gamma_1), \dots, (q_n, a_n, \gamma_n)$ tal que $(q, a, \gamma) \vdash (q_1, a_1, \gamma_1) \vdash \dots \vdash (q_n, a_n, \gamma_n) \vdash (q', a', \gamma')$.

Observación: siempre vale que $(q, a, \gamma) \vdash^* (q, a, \gamma)$.

Autómatas con Pila - Lenguaje Aceptado

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un autómata con pila, definimos:

Definición

$L(M)$ es el lenguaje de M por estado final si:

$$L(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, Z) \vdash^* (p, \epsilon, \gamma) \text{ para algún } p \in F, \gamma \in \Gamma^*\}.$$

Definición

$N(M)$ es el lenguaje de M por pila vacía si:

$$N(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, Z) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon), \text{ para algún } p \in Q\}.$$

Ambas definiciones son equivalentes!

Autómatas con Pila y Gramáticas Regulares

Proposición

Sea G una gramática libre de contexto, existe un autómata con pila M tal que $L(G) = N(M)$.