

Introducción a la Lógica y la Computación

Profesores: Mariana Badano, Raúl Fervari, Héctor Gramaglia,
Miguel Pagano

Ayudantes: Emanuel Meriles, Maximiliano Villamajo, Franco
Margaria

Estructura de la asignatura:

Parte I: Estructuras Ordenadas

Parte II: Lógica Proposicional

Parte III: Lenguajes y Autómatas

Agenda

Parte I: 17/8 al 9/9

Parte II: 16/9 al 19/10

Parte III: 21/10 al 18/11

Primer Parcial: 14/9

Segundo Parcial: 4/11

Recuperatorio y Coloquio: 23/11

Toda la información: <http://www.cs.famaf.unc.edu.ar/wiki/>

Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

2016

Ejes de Contenidos

- 1 Relaciones
- 2 Conjuntos Parcialmente Ordenados
- 3 Álgebras de Boole y Reticulados
- 4 Teoremas de representación

Definición de Relación

- Según la Real Academia Española, en su sentido matemático, el término significa:

"Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números"

- Por ejemplo:
 - Es correcto afirmar que 2 es menor que 5.
 - Es incorrecto afirmar que 2 es divisor de 5.

Definición de Relación

- O sea:
 - La comparación de 2 con 5 arroja resultado positivo, si el criterio de comparación es "*ser menor que*"
 - La comparación de 2 con 5 arroja resultado negativo, si el criterio de comparación es "*ser divisor de*"
- Podemos afirmar entonces que una relación queda determinada por el **conjunto de pares** que arrojan resultado positivo cuando son sometidos al "*criterio de comparación*" que determina la relación.

Definición Formal

Sean A y B dos conjuntos, una relación R entre A y B será un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

O sea: $R \subseteq A \times B$

Ejemplo

$$A = \{2, 4, 8, 10\}$$

$$B = \{1, 3, 9\}$$

La relación $R = \text{"es menor que"}$ se representa matemáticamente mediante el siguiente subconjunto de $A \times B$:

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Entonces la afirmación:

- "2 es menor que 9" se formaliza expresando $(2, 9) \in R$
- "4 no es menor que 1" se formaliza expresando $(4, 1) \notin R$

Notación

- Si R es una relación entre A y A , decimos que R es una relación **sobre** A
- Si R es una relación sobre A , y $(a, b) \in R$, entonces escribimos

$$a \sim_R b$$

o simplemente

$$a \sim b$$

Tipos fundamentales de relaciones

- **Funciones**

No serán abordadas en este curso

- **Relaciones de equivalencia**

Esta clase:

su vinculación con las particiones de un conjunto

- **Relaciones de orden**

Casi la totalidad de la primera parte de la materia

Propiedades de las relaciones

Sea R una relación sobre un conjunto A . Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si para todo $a \in A$: $a \sim a$
- **simétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$,
 $a \sim b$ implica que $b \sim a$
- **antisimétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$
 $a \sim b$ y $b \sim a$ implican que $a = b$
- **transitiva** si y sólo si para todo $a, b, c \in A$,
 $a \sim b$ y $b \sim c$ implican que $a \sim c$

Ejemplo 1: Relación "divide"

Es la relación sobre \mathbf{Z} definida mediante:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } a \text{ es divisor de } b$$

En cursos anteriores se utilizó la notación $a|b$

¿Cuáles de las 4 propiedades son satisfechas por la relación divide?

Ejemplo 2: Relación "congruente módulo k "

Dado un k fijo, es la relación sobre \mathbf{Z} definida mediante:

$$a \sim_k b \text{ si y sólo si } k \text{ es divisor de } b - a$$

En cursos anteriores se utilizó la notación $a \equiv b \pmod{k}$

¿Cuáles de las 4 propiedades son satisfechas por la relación "congruente módulo k "?

Relaciones de equivalencia

Son las relaciones que satisfacen las propiedades **reflexividad, simetría y transitividad**

Por ejemplo, la relación "congruente módulo k " es una relación de equivalencia, cualquiera sea k

Clases de equivalencia

Sea \sim una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A .

La *clase de equivalencia de x* se denota por $[x]$ y es el conjunto

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$$

Por ejemplo, en la relación "congruente módulo 3",

$$[0] = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \dots\}$$

$$[3] = [0]$$

$$[4] = [1]$$

$$[5] = [2] \dots$$

Partición de un conjunto

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A , que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A .

Por ejemplo, las siguientes son distintas particiones de $A = \{a, b, c\}$:

$$P_1 : \{a\}, \{b\}, \{c\};$$

$$P_2 : \{a\}, \{b, c\};$$

$$P_3 : \{a, b, c\}.$$

Teorema

Sea \sim una relación de equivalencia en un conjunto A y sean x , y elementos de A . Entonces

- 1 $[x] = [y]$ si y sólo si $x \sim y$.
- 2 si $x \not\sim y$, entonces $[x]$ e $[y]$ son disjuntas.

Relación de equivalencia y Partición

Son conceptos duales

Sea \sim una relación de equivalencia en un conjunto A , entonces las clases de equivalencia determinan una partición de A

Sea P_1, P_2, \dots una partición de A , entonces la relación definida mediante $a \sim b$ si y sólo si existe k tal que $a, b \in P_k$ es una relación de equivalencia sobre A

Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Notación: $a \leq b$ en lugar de $(a, b) \in R$

Ejemplos:

- 1 Si a y b son números, entonces $a \leq b$ denota la relación de orden usual sobre \mathbb{R} (o \mathbb{Z}), salvo que se diga explícitamente otra cosa.
- 2 $a \leq b$ si y sólo si a divide a b sobre \mathbb{N} , (se puede usar $a|b$)
- 3 $X \leq Y$ si y sólo si $X \subseteq Y$ sobre $\mathcal{P}(A)$

