

# Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial**  $R$  sobre un conjunto  $A$  es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

**Notación:**  $a \leq b$  en lugar de  $(a, b) \in R$

# Relación de Orden Parcial

## Ejemplos:

- 1 **Relación de orden usual** sobre  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{Z}$ ): Si  $a$  y  $b$  son números, entonces  $a \leq b$  refleja la relación de orden dada por la representación geométrica de la recta, salvo que se diga explícitamente otra cosa.
- 2 La relación definida por  $a \leq b$  si y sólo si  $a$  divide a  $b$  (sobre  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ) es una relación de orden. También utilizamos  $a|b$ .
- 3  $X \leq Y$  si y sólo si  $X \subseteq Y$  (sobre  $\mathcal{P}(A)$ ) es una relación de orden

# Diagramas de Hasse

## Definición de la relación cubrimiento

Sea  $A$  un conjunto y  $\leq$  un orden parcial sobre  $A$ . Sean  $a, b \in A$  elementos distintos. Decimos que  $b$  cubre a  $a$  si  $a \leq b$  y no existe  $c$  distinto de  $a$  y  $b$  tal que  $a \leq c$  y  $c \leq b$ .

## Definición de Diagrama de Hasse

Consiste de puntos llamados **vértices** que representan los elementos del conjunto y de **arcos** o **segmentos ascendentes** que unen pares de vértices de la siguiente manera:

$a$  está conectado con  $b$  mediante un arco ascendente si y sólo si  $b$  cubre a  $a$ .

# Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO o POSET)

Es un par  $(P, \leq)$  donde  $P$  es un conjunto y  $\leq$  es un orden parcial sobre  $P$

## Ejemplos:

- 1  $(\mathbb{R}, \leq)$  es un POSET
- 2  $(\mathbb{N}, |)$  es un POSET
- 3  $(\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}, |)$  es un POSET
- 4  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  es un POSET

# Máximos y Mínimos

$(P, \leq)$  un POSET

- $a$  es mínimo de  $P$  si para todo  $x$  en  $P$  se tiene  $a \leq x$
- $a$  es máximo de  $P$  si para todo  $x$  en  $P$  se tiene  $x \leq a$

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

- 1  $(\mathbb{N}, \leq)$
- 2  $([0, 1), \leq)$
- 3  $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
- 4  $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
- 5  $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

# Maximales y Minimales

$(P, \leq)$  un POSET

- $a$  es **minimal** de  $P$  si para todo  $x$  en  $P$ ,  $x \leq a$  implica que  $x = a$
- $a$  es **maximal** de  $P$  si para todo  $x$  en  $P$ ,  $a \leq x$  implica que  $a = x$

¿Cuáles de los siguientes tienen maximales y/o minimales?

- 1  $(\mathbb{N}, \leq)$
- 2  $([0, 1), \leq)$
- 3  $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
- 4  $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
- 5  $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

# Orden Total o Cadena

Un *orden total* sobre un conjunto  $P$  es un orden parcial  $\leq$  sobre  $P$  que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Algunos ejemplos de órdenes totales:

- 1 El orden  $\leq$  en  $\mathbb{R}$
- 2 El orden lexicográfico en un diccionario.

# Supremos e Ínfimos

Sea  $(P, \leq)$  un poset y sea  $S \subseteq P$ .

- 1  $a \in P$  se dice *cota superior* de  $S$  si para todo  $b \in S$  ocurre que  $b \leq a$ .
- 2  $a \in P$  se dice *cota inferior* de  $S$  si para todo  $b \in S$  ocurre que  $a \leq b$ .
- 3  $a \in P$  se dice *supremo* de  $S$  si  $a$  es una cota superior de  $S$  y para toda cota superior  $b$  de  $S$  se cumple que  $a \leq b$ .
- 4  $a \in P$  se dice *ínfimo* de  $S$  si  $a$  es una cota inferior de  $S$  y para toda cota inferior  $b$  de  $S$  se cumple que  $b \leq a$ .



# Isomorfismo de POSETS

Sean  $(P, \leq)$ ,  $(Q, \leq')$  dos posets, y sea  $f : P \rightarrow Q$  una función.

Diremos que  $f$  es un **isomorfismo** si  $f$  es biyectiva y para todo  $x, y \in P$ , se cumple que

$x \leq y$  si y sólo si  $f(x) \leq' f(y)$

# Propiedad Fundamental de los Isomorfismos

## Lema

Sean  $(P, \leq)$  y  $(Q, \leq')$  posets. Sea  $f : P \rightarrow Q$  un isomorfismo.

- 1 Para cada  $S \subseteq P$ , se tiene que existe  $\sup(S)$  si y sólo si existe  $\sup(f(S))$  y en el caso de que existan tales elementos se tiene que  $f(\sup(S)) = \sup(f(S))$ .
- 2 Para cada  $S \subseteq P$ , se tiene que existe  $\inf(S)$  si y sólo si existe  $\inf(f(S))$  y en el caso de que existan tales elementos se tiene que  $f(\inf(S)) = \inf(f(S))$ .