Práctico 3

Recordar que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *eventualmente constante* si cumple que

$$\exists c, N,\ \forall n,\ N < n \implies a_n = c.$$

1. Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante y esto está atestiguado por c y N. Demostrar que cualquier $N' \geq N$ también sirve para justificarlo.

2. Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son eventualmente constantes, entonces $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. (¡Ojo! Los respectivos c y N pueden ser ambos distintos).

3. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\epsilon > 0$ dados. Definir formalmente: "*Los términos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eventualmente tienen módulo menor que ϵ*".

Para los siguientes ejercicios, es conveniente recordar que toda sucesión es una función, y repasar las definiciones de funciones (de)crecientes (monótonas y estrictas).

4. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión.

(a) Escribir, usando la notación para sucesiones, las definiciones de los cuatro tipos de (de)crecimiento que puede tener $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, entonces $\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente.

(c) Enunciar un resultado análogo al anterior para $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Demostrar que la sucesión $\left\{\sqrt{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente (recordar P1E2(c)).

6. Decidir si las siguientes sucesiones están acotadas inferior y/o superiormente. Justificar.

(a) $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) $\{(-1)^n \cdot n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Una sucesión eventualmente constante.

7. Demostrar que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si y sólo si existe M tal que $|a_n| \leq M$. Notar que esto aplica a funciones en general.

8. Considerar la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(a) Para $\varepsilon = 0{,}2$ y $\varepsilon = 0{,}05$: determinar los $n \in \mathbb{N}$ tales que a_n se encuentra a una distancia de al menos ε de 0.

(b) Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$

10. Usar las reglas de cálculo para obtener los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5-2n}{3n-7}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2}.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$

11. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-100}{n} = +\infty.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$

12. Calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+7n}{n-2}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2-4n}).$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1}.$

13. Probar que para todo número real $\ell \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = \ell$.

14. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$.

(a) Dar tres subsucesiones convergentes de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ distintas.

(b) Probar que si $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 1$ ó -1.

15. (a) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente igual a ℓ.

(b) Determinar todas las subsucesiones convergentes (con su límite) de la sucesión

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

16. Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

17. (a) Demostrar que si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demostrar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

(c) Hallar el límite de la sucesión del ítem anterior. (Sugerencia: notar que si a_n denota al n-ésimo término de la sucesión, entonces $(a_{n+1})^2 = 2a_n$).

18. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, entonces $\{a_{3n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también diverge.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, y $b_n > 0$ para todo n, entonces $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$ o converge.

(d) Si $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ejercicios Extra

19. Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante si y sólo si existe un N tal que $\forall m, n,\ N < m, n \implies a_n = a_m$.

20. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión.

(a) Definir formalmente: "*Los términos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eventualmente tienen módulo tan chico como uno quiera*".

(b) Convencerse de que esto es exactamente lo mismo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

21. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$.

22. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq a_n$.

23. Probar que la definición de límite de sucesiones es equivalente a la que requiere que N sea un número natural. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \underline{N \in \mathbb{N}},\ \forall n > N,\ |a_n - l| < \varepsilon.$$