

**ANÁLISIS MATEMÁTICO I**  
**PRIMER CUATRIMESTRE — 2024, FAMAFA - UNC**  
**PRÁCTICO 4**

Para  $a \in \mathbb{R}$ , un *entorno* de  $a$  es un intervalo abierto  $(x, y)$  que contiene a  $a$  (i.e.,  $x < a < y$ ).

1. Sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

- (a)  $X$  incluye un entorno de  $a$ ;
- (b) Existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subseteq X$ .

2. Probar que si  $f$  y  $g$  están definidas en sendos entornos de  $a$  (salvo quizá en  $a$  mismo), entonces  $f + g$  y  $f \cdot g$  también lo están.

3. En cada uno de los siguientes casos, para un  $\varepsilon > 0$  dado, encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para todo  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$ .

(a) 
$$\begin{cases} f(x) = x^4, \\ l = a^4. \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}, \\ a = 1, l = 1. \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} f(x) = x^4 + 2, \\ a = 1, l = 2. \end{cases}$$

4. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a.$

(b) Si  $f(x)$  es constante e igual a  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a > 0.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = 0.$$

5. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

$$(d) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h} \right).$$

$$(e) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \quad (a > 0)$$

$$(f) \lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}.$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - \lfloor x \rfloor).$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

**Aclaración.** Recordamos que las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \searrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \nearrow \infty} f(x)$$

6. Trazar el gráfico de la función

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1, \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4 - x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Además, determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

- |                                      |                                 |                                |                                      |
|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| (a)                                  | (c)                             | (e)                            | (g)                                  |
| $\lim_{x \rightarrow -1} g(x).$      | $\lim_{x \rightarrow -1} g(x).$ | $\lim_{x \rightarrow 1} g(x).$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$ |
| (b)                                  | (d)                             | (f)                            | (h)                                  |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$ | $\lim_{x \rightarrow 1} g(x).$  | $\lim_{x \rightarrow 1} g(x).$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$ |

7. Demostrar por definición que no existen los siguientes límites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(1/x)$ .

8. Calcular los siguientes límites en caso de existir o ser  $\pm\infty$ .

Justificar.

(a)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3y - 4}{6y + 1}$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x}{x^4 - 2}$ .

(e)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(b)

(d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 7}{4x^2 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

9. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$ , usando la definición de límite.
- (b) Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ .
- (c) Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$  existe, entonces no necesariamente existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- (d) Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(1/x)$  existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(1/x) = \infty$ .
- (f) Existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

10. Calcular los siguientes límites. Recordar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ .

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x)}.$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}.$$

**11.** Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones  $f$  y  $g$  están definidas en un entorno de  $a$  o de  $0$  según corresponda.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(-x).$$

(b) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existen, entonces

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  no existe.



(c) Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .

(d) Si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ .