Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Martín Agustín Luciana José Luis

FaMAF, 18 de marzo de 2024

Novedades

Cambio fecha de parcial

- Primer parcial: **22 de abril**.

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Caracterizaciones de supremo e ínfimo
3. Arquimedianidad
4. Relación entre supremo y máximo
5. Ínfimos y ejemplos
6. Densidad
7. Conclusión

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff$ $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff$ $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff$ $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff$ $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff$ $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff$ $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \varnothing$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff$ $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff$ $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \varnothing$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores. Análogamente con “inferiormente” e **ínfimo**, $\inf A$.

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff$

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A, entonces $s \leq c$.

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A, entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$; (Demostramos)

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A, entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$; (Demostramos)
3. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A, entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$; (Demostramos)
3. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)
4. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t \leq a$; (Apunte)

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A.
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C,\ s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A, entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$; (Demostramos)
3. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)
4. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t \leq a$; (Apunte)
5. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon \leq a$. (Ídem)

Arquimedianidad

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

Arquimedianidad

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

Teorema ($\mathbb{R}$ es arquimediano)

$\mathbb{N}$ *no está acotado superiormente.*

Arquimedianidad

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

Teorema ($\mathbb{R}$ es arquimediano)

$\mathbb{N}$ *no está acotado superiormente.*

Corolario

1. *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$*.*
2. $\mathbb{Z}$ *no está acotado superior ni inferiormente.*

Arquimedianidad

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

Teorema ($\mathbb{R}$ es arquimediano)

$\mathbb{N}$ *no está acotado superiormente.*

Corolario

1. *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$*.*
2. $\mathbb{Z}$ *no está acotado superior ni inferiormente.*

Ejercicio

Si $N \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}$ y Z está acotado (inferior)superiormente, entonces N está acotado (inferior)superiormente.

Supremo y máximo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$.

Supremo y máximo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$.

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A,\ s \leq a$;

Supremo y máximo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$.

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A,\ s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A.

Supremo y máximo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$.

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A,\ s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A.

Lema

- *Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.*
- *Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.*

Supremo y máximo

Son equivalentes:

1. $s = \sup A$;
2. s es cota superior de A y $\forall t < s,\ \exists a \in A,\ t < a$.

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A,\ s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A.

Lema

- *Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.*
- *Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$. Luego,*
- *si $\sup A \notin A$, entonces A no tiene máximo.*

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x,\ \exists a \in A,\ t < a$.
- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x,\ \exists a \in A,\ t \leq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.
- …etcétera.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- …etcétera.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- …etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x,\ \exists a \in A,\ t < a$.
- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x,\ \exists a \in A,\ t \leq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.
- …etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \operatorname{ínf} A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t > a$.
- $x = \operatorname{ínf} A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\operatorname{ínf} A \in A$, entonces $\operatorname{ínf} A = \operatorname{mín} A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\operatorname{mín} A = \operatorname{ínf} A$ y luego $\operatorname{ínf} A \in A$.
- ... etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\operatorname{ínf} A$, y si existe $\operatorname{mín} A$ y/o $\operatorname{máx} A$.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \operatorname{ínf} A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t > a$.
- $x = \operatorname{ínf} A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x,\ \exists a \in A,\ t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\operatorname{ínf} A \in A$, entonces $\operatorname{ínf} A = \operatorname{mín} A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\operatorname{mín} A = \operatorname{ínf} A$ y luego $\operatorname{ínf} A \in A$.
- . . . etcétera.

Análisis de $A := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\operatorname{ínf} A$, y si existe $\operatorname{mín} A$ y/o $\operatorname{máx} A$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Densidad

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.

Densidad

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.

Aula Virtual ▶ Encuestas ▶ Densidad (T. Mañana)

- ¿Es $\mathbb{R}$ denso? ¿Lo es $\mathbb{Z}$?
- Si D es denso, ¿es $D = \mathbb{R}$?

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Densidad

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.

Aula Virtual ▶ Encuestas ▶ Densidad (T. Mañana)

- ¿Es $\mathbb{R}$ denso? ¿Lo es $\mathbb{Z}$?
- Si D es denso, ¿es $D = \mathbb{R}$?

Teorema

$\mathbb{Q}$ es denso.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es denso si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.
- $\mathbb{Q}$ es denso.

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es denso si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.
- $\mathbb{Q}$ es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$. En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es denso si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.
- $\mathbb{Q}$ es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$. En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.

Lema

Para todos los $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $r < j < s$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es denso si y sólo si $\forall x\, y \in \mathbb{R},\ \ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.
- $\mathbb{Q}$ es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$. En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.

Lema

Para todos los $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $j \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ tal que $r < j < s$.

Teorema

$\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ es denso.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$ ——————?—————— $\cdots$

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$ ——————?—————— $\cdots$

Respuesta

Toda partición $\mathbb{R} = I \cup D$ tal que $\forall r \in I,\ s \in D,\ r < s$ está determinada por un punto $a \in \mathbb{R}$, de manera que se da exactamente una de las siguientes:

- $I = (-\infty, a)$ y $D = [a, \infty)$, o bien.
- $I = (-\infty, a]$ y $D = (a, \infty)$.