Apunte de Introducción a la Lógica y la Computación
Lógica Proposicional

Pedro Sánchez Terraf (CIEM-FAMAF)

20 de octubre de 2020

Este apunte está basado principalmente en el primer capítulo del libro *"Logic and Structure"* de Dirk van Dalen (tercera edición, Springer)[1], y se nutrió con las sugerencias y correcciones indicadas por H. Gramaglia, M. Pagano, D. Alonso, J. Venzon, P. Dal Lago y Luis M. Ferrer Fioritti, entre otros. Agradezco a Pablo Villalba por los apuntes tomados durante el segundo semestre de 2003.

Índice

1. La Lógica Proposicional: lo básico

1.1. Introducción: Semántica versus Sintaxis

Dividiremos el análisis de la sintaxis proposicional en dos partes, primero presentando su lenguaje y en segundo término dando un procedimiento para "derivar" proposiciones a partir de otras. Entre esas dos partes formalizaremos la semántica. Para finalizar, investigaremos las relaciones que surgen entre las nociones definidas por vía sintáctica y por vía semántica.

1.2. Lenguaje de la Lógica Proposicional

La lógica proposicional se escribirá con el siguiente alfabeto:

1. ***Símbolos proposicionales*** (en cantidad numerable): $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$;
2. ***Conectivos***: $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
3. Símbolos ***auxiliares***: '(' y ')'.

Los símbolos proposicionales y $\bot$ son los ***átomos*** o "proposiciones atómicas", y los designaremos con el nombre At. El conectivo "$\bot$" es "nulario" (corresponde a una *constante*) y el resto son binarios. Para designar un operador binario arbitrario, utilizaremos el símbolo "$\odot$".

Definición 1. El conjunto de las *proposiciones*, $PROP$, es el menor conjunto X que cumple con las siguientes propiedades:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in X$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Para todas φ, ψ en X, $(\varphi \odot \psi)$ está en X.

También usaremos los nombres ***fórmulas proposicionales*** o simplemente "fórmulas" para nombrar a las proposiciones. Utilizaremos las letras griegas φ, ψ, χ, $\ldots$[2] para nombrar proposiciones. Así, la expresión $(\varphi \odot \psi)$ puede ser $(\varphi \wedge \psi)$, ó $(\varphi \rightarrow \psi)$, o bien $(\varphi \vee \psi)$, etcétera. Sería bueno notar que los símbolos que utilizamos que no están entre los enumerados más arriba, **no son** proposiciones ni pueden formar parte de ellas. Digamos, el símbolo φ se utilizó más arriba para *designar* una proposición, para ser el nombre, no la proposición misma. Claramente, la letra griega φ no es ningún p_i, ni un conectivo ni un paréntesis. Es el nombre que le damos a una proposición, y cuando decimos $(\varphi \rightarrow \psi)$ nos estamos refiriendo a cualquiera de las fórmulas que tengan dicha *estructura*, por ejemplo $(p_0 \rightarrow p_1)$, $(p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_4))$, etcétera.

Teorema 2 (inducción en subfórmulas)**.** *Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:*

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Demostración. Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. X satisface las tres propiedades de la Definición 1, así que $PROP \subseteq X$ (pues $PROP$ es el **menor** conjunto con tales propiedades). Como $X \subseteq PROP$, tenemos $X = PROP$ y entonces $A(\varphi)$ vale para toda $\varphi \in PROP$. $\square$

Veamos un ejemplo de prueba por inducción:

[2] Las letras griegas "φ", "ψ" y "χ" se llaman, respectivamente, "fi", "psi" y "ji".

Definición 3. Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una ***serie de formación*** de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \odot \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema 4. *Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.*

Demostración. Analizamos cada caso:

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una serie de formación de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por hipótesis inductiva, φ y ψ tienen sendas series de formación; llamémoslas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$. Luego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, (\varphi \odot \psi)$ es serie de formación de $(\varphi \odot \psi)$: contrastar con las definiciones.

Con esto se concluye la prueba. $\square$

Dado que las proposiciones tienen una construcción recursiva, uno puede definir objetos en términos de proposiciones de manera recursiva (también llamada inductiva). Veamos un ejemplo:

Definición 5. El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, $gr(\varphi) := n$; $gr(\perp) := -1$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}$.

Es decir, el grado de una proposición es el máximo subíndice de los símbolos proposicionales que ocurren en ella. ¿Cómo aplicamos tal definición? Calculemos $gr(((p_0 \wedge p_3) \to p_2))$:

$$gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) = \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} \qquad \text{Por el caso "}\odot\text{"}$$

Ahora nos haría falta hacer lo mismo para cada término, es decir, *recursivamente:*

$$\begin{aligned}
&= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{Por el caso "}At\text{"} \\
&= \max\big\{\max\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{Por el caso "}\odot\text{"} \\
&= \max\big\{\max\{0, 3\}, 2\big\} && \text{Por el caso "}At\text{"} \\
&= \max\{3, 2\} && \text{Por definición de máx} \\
&= 3 && \text{Por definición de máx}
\end{aligned}$$

El siguiente teorema nos asegura que las definiciones recursivas sobre $PROP$ funcionan bien.

Teorema 6 (definición por recursión en subfórmulas)**.** *Sea A un conjunto y supongamos dadas funciones $H_{At} : At \to A$, y $H_\odot : A^2 \to A$. Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ tal que*

$$\begin{cases} F(\varphi) &= H_{At}(\varphi) \quad \textit{para } \varphi \textit{ en } At \\ F((\varphi \odot \psi)) &= H_\odot\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \end{cases} \tag{1}$$

Demostración. Demostraremos solamente la unicidad del mapeo F. Esto (como se repetirá en muchísimas ocasiones más adelante) se hará por inducción en subfórmulas. Supongamos que G también satisface con las propiedades (1). Luego,

$\boxed{\varphi \in At}$ Sabemos que $F(\varphi) = H_{At}(\varphi) = G(\varphi)$, por ser φ atómica.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Supongamos (por HI) que $F(\varphi) = G(\varphi)$ y $F(\psi) = G(\psi)$. Luego

$$F((\varphi \odot \psi)) = H_{\odot}(F(\varphi), F(\psi)) = H_{\odot}(G(\varphi), G(\psi)) = G((\varphi \odot \psi)).$$

Con esto probamos cada paso requerido por el principio de inducción en subfórmulas (Teorema 2), así que podemos concluir que F y G coinciden en todo $PROP$. □

Ejemplo 1. Para la función $gr : PROP \to \mathbb{Z}$ considerada más arriba, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} H_{At}(\varphi) & = & \begin{cases} n & \text{si } \varphi = p_n \\ -1 & \text{si } \varphi = \bot \end{cases} \\ H_{\odot}(m,n) & = & \text{máx}\{m,n\} \end{array}$$

Ejercicio 1. Comprobar que las funciones del Ejemplo 1 son las que corresponden.

Nota 1. La definición del conjunto $PROP$ es recursiva, pero **no** por recursión en subfórmulas, sino mediante un teorema aún más general que no enunciaremos aquí; baste observar que si en tal definición hubiésemos usado el Teorema 6, habríamos incurrido en una *petitio principi*.[3]

1.3. Semántica

Hasta ahora, nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos. A continuación les daremos una noción de "significado": cuándo son ciertas y cuándo falsas. Para ello, consideraremos que un "universo posible" donde se efectúan esas preguntas viene dado por una función, que a cada símbolo proposicional le asigna 0 cuando es "falsa" y 1 cuando es "verdadera".

Definición 7. Una ***asignación*** será una función $v : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Una vez determinados los valores de verdad de los símbolos proposicionales, podemos dar significado a todas las proposiciones. Nuestra noción de "significado" viene dado por la siguiente definición.

Definición 8. Una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ es una ***semántica*** o ***valuación*** si:

1. $[\![\bot]\!] = 0$.
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \text{mín}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \text{máx}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

[3] El problema del huevo y la gallina, para decirlo en criollo.

Ejercicio 2. Aunque la Definición 8 **no es** una definición por recursión como se establece el Teorema 6 (¿por qué?), se pueden identificar las funciones $H_\odot$ (para cada "$\odot$"). Encontrarlas. ¿Qué pasa con H_{At}?

Si nuestros símbolos proposicionales codifican (para dar un ejemplo) ciertas afirmaciones sobre el mundo físico en un momento dado, digamos:

p_0	Llueve.
p_1	Hace frío.
p_2	Son las dos de la tarde
...	...
p_{100}	Cayó un meteorito
...	...,

cada asignación corresponderá a un posible momento en la historia.

Ejercicio 3. Determinar para **este** preciso momento cuáles serían los valores de $v(p_i)$ para $i = 0, 1, 2$ e $i = 100$.

Teorema 9 (de Extensión)**.** *Para toda asignación f, existe una única función semántica $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in At$.*

Demostración. Construiremos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ Definimos $[\![\varphi]\!]_f := f(\varphi)$ si φ es un símbolo proposicional y $[\![\bot]\!] := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Dados $[\![\varphi]\!]_f$ y $[\![\psi]\!]_f$, definimos $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Se sigue inmediatamente de esta definición que $[\![\cdot]\!]_f$ cumple con todas las propiedades para ser una valuación; contrastar con el Ejercicio 2. Más aún, para que una función $[\![\cdot]\!]_f$ cumpla con la hipótesis del teorema debe satisfacer el caso base ($\varphi \in At$) de la definición recursiva anterior, y para que sea una valuación está obligada a satisfacer las propiedades impuestas por los otros casos de la recursión. Es decir, una valuación tal siempre va a poder obtenerse por una construcción recursiva. Y como la construcción recursiva da una única respuesta (por el Teorema 6), se concluye que la extensión de f a $PROP$ es única. $\square$

Como consecuencia inmediata de este teorema, obtenemos:

Corolario 10. *Si $[\![\cdot]\!]_1$ y $[\![\cdot]\!]_2$ son funciones semánticas que coinciden en At (es decir, $[\![\varphi]\!]_1 = [\![\varphi]\!]_2$ para toda $\varphi \in At$), entonces $[\![\cdot]\!]_1 = [\![\cdot]\!]_2$.*

Demostración. Se puede probar por inducción en subfórmulas; esta opción queda como ejercicio. Sino, podemos considerar el siguiente argumento: las restricciones de v y v' a At (es decir, v y v' pensadas como funciones de At en $\{0, 1\}$) son iguales; llamémosle w a esa restricción común. Las valuaciones v y v' son extensiones de w a todo $PROP$ y el Teorema de Extensión obliga (por la unicidad) a que sean iguales. $\square$

Antes de proseguir nos será sumamente útil introducir ***abreviaturas*** para ciertas fórmulas que aparecerán una y otra vez, y para las cuales también tenemos concepciones previas de lo que deben significar.

Definición 11. Para proposiciones φ y ψ, la expresión "$(\neg\varphi)$" denotará la proposición $(\varphi \to \bot)$ y "$(\varphi \leftrightarrow \psi)$" denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Ejercicio 4. Probar que para toda valuación $[\![\cdot]\!]$, $[\![(\neg\varphi)]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$, y que $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Siguiendo la analogía de una valuación con un momento posible de la historia, nuestro próximo concepto caracteriza a las proposiciones que son válidas "siempre" (o en todo universo posible).

Definición 12. φ es una ***tautología*** (escribimos "$\models \varphi$") si y sólo si $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda asignación v. Sea $\Gamma \subseteq PROP$; diremos que φ es ***consecuencia*** de Γ (escribimos "$\Gamma \models \varphi$") si y sólo si para toda asignación v tal que

Para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$

se da

$[\![\varphi]\!]_v = 1.$

Se ve fácilmente que "$\models \varphi$" es lo mismo que "$\emptyset \models \varphi$". Si $\Gamma \subseteq PROP$ y v es tal que para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$, diremos que v ***valida*** Γ, o más informalmente, que es una "***asignación de*** Γ", y escribiremos $[\![\Gamma]\!]_v = 1$.

Ejemplo 2.

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.

   Sea v una asignación arbitraria. Como los únicos valores posibles de $[\![\cdot]\!]_v$ son 0 y 1, ver que da 1 es lo mismo que ver que no da 0.

   $$\begin{aligned} [\![\varphi \to \varphi]\!]_v = 0 &\iff [\![\varphi]\!]_v = 0 \text{ y } [\![\varphi]\!]_v = 1 \\ &\iff \text{contradicción} \end{aligned}$$

   Como suponer $[\![\varphi \to \varphi]\!]_v = 0$ es contradictorio, concluimos $[\![\varphi \to \varphi]\!]_v = 1$.

2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (ejercicio, recordar el Ejercicio 4 aquí).

3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$. Sea v una asignación tal que $[\![\varphi]\!]_v = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_v = 1$. Luego, sabemos que **no** es el caso que $[\![\varphi]\!]_v = 1$ y $[\![\psi]\!]_v = 0$ (por la segunda igualdad); es decir: o bien $[\![\varphi]\!]_v = 0$, ó $[\![\psi]\!]_v = 1$, ó ambos. Como $[\![\varphi]\!]_v = 1$, debe ser $[\![\psi]\!]_v = 1$, que era lo que debíamos probar.

4. $\not\models p_1$

   Sale negando la definición: p_1 **no** es una tautología si y sólo si existe alguna v tal que $[\![p_1]\!]_v = 0$. Basta entonces tomar $v(p_n) := 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y tenemos el resultado, dado que $[\![p_1]\!] = v(p_1) = 0$ por definición de $[\![\cdot]\!]_v$.

Para probar que una proposición φ en particular es una tautología, no hace falta ver que para cada una de las infinitas[4] valuaciones posibles v se da $[\![\varphi]\!]_v = 1$, sino que esto se puede saber revisando una cantidad finita de casos. Para ello, necesitaremos un resultado de índole práctica, que nos asegura una forma *finitista* de aplicar valuaciones varias a una proposición.

[4]De hecho, hay tantas como números reales (!). Probar esto es un ejercicio interesante.

Lema 13 (de Coincidencia)**.** *Si* $v(p_i) = v'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Como la única fórmula atómica que ocurre en φ es φ, tenemos que $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi) = v'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{v'}$, en el caso de que φ sea algún p_n. Para concluir, notar que $[\![\bot]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que v y v' coinciden en los átomos de $(\varphi \wedge \psi)$; pero estos átomos incluyen los de φ y ψ, y luego por hipótesis inductiva $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$ y $[\![\psi]\!]_v = [\![\psi]\!]_{v'}$. Ahora bien,

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v = \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\} = \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_{v'}, [\![\psi]\!]_{v'}\} = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{v'}.$$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ El resto de los casos queda como ejercicio. □

Otra forma de enunciar el Lema de Coincidencia es la siguiente: si dos valuaciones coinciden en los símbolos proposicionales que forman φ, entonces coinciden en φ. Es precisamente este lema el que da utilidad a las ***tablas de verdad***. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 3. Queremos ver que $\models ((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$. Deberíamos (por lo menos en principio) revisar todas las posibles asignaciones. Cada una de ellas es una asignación de un 0 ó un 1 a cada símbolo proposicional:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$
v	1	0	1	1	0	$\dots$

Luego, tomemos **todas** las asignaciones y nos fijemos a qué evalúa nuestra proposición, considerando sus extensiones mediante el Teorema de Extensión:

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
v_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
v_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
v_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
v_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Hasta ahora, sólo nos dio 1, pero una prueba a ciegas no nos asegura nada. De todos modos, si entendimos la definición de valuación, nos daremos cuenta que en cada caso sólo necesitamos conocer el valor de p_0 y p_2 en la respectiva asignación; por ejemplo, como v_1 y v_3 coinciden en p_0 y p_2, también coinciden en $(p_0 \wedge p_2)$. En fin, nos podemos quedar con la parte de la tabla que contiene a p_0 y a p_2:

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_3	1	1	1	1
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	1
$\vdots$		$\vdots$		

y por último, eliminamos la parte repetida:

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
v_1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_4	0	1	0	1
v_5	0	0	0	1

con lo cual nos queda una tabla de verdad como Dios[5] manda.

Definición 14. La ***sustitución*** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ, denotada por $\varphi[\psi/p]$ (léase: "φ, con ψ en lugar de p") se define de la siguiente manera:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejercicio 5. Probar que $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$ y $(\varphi \leftrightarrow \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \leftrightarrow \chi[\psi/p])$.

Los próximos resultados mostrarán que la sustitución funciona bien con la relación de consecuencia.

Lema 15. *Para cada asignación v, su valuación asociada $[\![\cdot]\!] := [\![\cdot]\!]_v$ cumple con que $[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ implica $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$,*

Demostración. Fijemos una $[\![\cdot]\!]$; probaremos el resultado por inducción en ψ suponiendo, en cada paso de la prueba inductiva, válido el antecedente para probar el consecuente.

$\boxed{\psi \in At}$ Aplicamos directamente la definición: Si $\psi = p$, entonces $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\varphi_1]\!]$ y $[\![\psi[\varphi_2/p]]\!] = [\![\varphi_2]\!]$. Como los segundos miembros son iguales por hipótesis, son iguales también los primeros miembros. Si $\psi \neq p$, entonces $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$, con lo que queda probado este caso.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ Supongamos $[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$. Por hipótesis inductiva obtenemos $[\![\varphi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\varphi[\varphi_2/p]]\!]$ y $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
[\![(\varphi \odot \chi)[\varphi_1/p]]\!] &= [\![(\varphi[\varphi_1/p] \odot \chi[\varphi_1/p])]\!] && \text{por caso "}\odot\text{" de sustitución}\\
&= H_\odot([\![\varphi[\varphi_1/p]]\!], [\![\chi[\varphi_1/p]]\!]) && \text{por definición de valuación.}
\end{aligned}$$

Aquí "$H_\odot$" son las del Ejercicio 2.

$$\begin{aligned}
&= H_\odot([\![\varphi[\varphi_2/p]]\!], [\![\chi[\varphi_2/p]]\!]) && \text{por hipótesis inductiva}\\
&= [\![(\varphi[\varphi_2/p] \odot \chi[\varphi_2/p])]\!] && \text{por definición de valuación}\\
&= [\![(\varphi \odot \chi)[\varphi_2/p]]\!] && \text{por caso "}\odot\text{" de sustitución.}
\end{aligned}$$

Queda entonces probado $[\![(\varphi \odot \chi)[\varphi_1/p]]\!] = [\![(\varphi \odot \chi)[\varphi_2/p]]\!]$. $\square$

Teorema 16 (Regla de Leibnitz). *Si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ entonces $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.*

Demostración. Supongamos que $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. Luego, dada una asignación arbitraria y su valuación asociada $[\![\cdot]\!]$, tenemos $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!] = 1$ y entonces $[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$ por el Ejercicio 4. Por el Lema 15, obtenemos $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$ y luego, nuevamente por el Ejercicio 4, tenemos $[\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!] = 1$. Como $[\![\cdot]\!]$ era arbitraria, sabemos que *para toda v* se da $[\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!] = 1$, pero esto no es otra cosa que $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. $\square$

[5] Reemplace por la deidad que más le agrade.

1.4. Completitud Funcional

En vista de los resultados anteriores, se deduce que la semántica de un conectivo (i.e., cómo se comporta con respecto a una asignación) viene dada por su tabla de verdad. Ahora, una tabla de verdad no es otra cosa que una función de n variables (para el caso de los conectivos binarios, $n = 2$; unarios, $n = 1$ y etcétera) que toma valores 0 ó 1 y devuelve un valor 0 ó 1. Retomando el Ejemplo 3, la tabla de verdad de $(p_0 \wedge p_2)$ es

	p_0	p_2	$p_0 \wedge p_2$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_4	0	1	0
v_5	0	0	0

Es decir, es exactamente la función $H_\wedge$ que va de $\{0,1\}^2$ a $\{0,1\}$. En general, para cada función de $\{0,1\}^2$ a $\{0,1\}$ podemos definir un nuevo conectivo correspondiente. Si por ejemplo tomamos la función $H_|$ definida por esta tabla:

x	y	$H_\vert(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

obtenemos un nuevo conectivo binario, la “rayita” (en inglés, *stroke*) de Scheffer, “|”. Si v es una asignación, obtenemos $[\![(\varphi \mid \psi)]\!]_v = H_|([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$, o en otros términos,

$$[\![(\varphi \mid \psi)]\!]_v := 1 - \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\}. \tag{2}$$

Ejercicio 6. Comprobar esto último.

Se pueden definir conectivos ternarios, cuaternarios, ... En general, (la semántica de) un conectivo n-ario “#” vendrá dado por una función $H_\# : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ y tendremos

$$[\![\#(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\!] := H_\#([\![\varphi_1]\!], \ldots, [\![\varphi_n]\!]).$$

Un ejemplo de conectivo ternario sería el siguiente:

p_0	p_1	p_2	$\#(p_0,p_1,p_2)$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Volvamos por un momento a la ecuación (2). Mediante un simple cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\![(\varphi \mid \psi)]\!]_v &= 1 - \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\} && \text{definición de } | \\
&= 1 - [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_v && \text{definición de valuación} \\
&= [\![(\neg(\varphi \wedge \psi))]\!]_v && \text{Ejercicio 4}
\end{aligned}$$

Luego, a nivel semántico, decir "$\varphi \mid \psi$" es exactamente lo mismo que decir "$(\neg(\varphi \wedge \psi))$" (una es "cierta" si y sólo si la otra lo es). Diremos entonces que $\mid$ *es expresable en términos de* $\neg$ *y* $\vee$.

Ejercicio 7. Comprobar que $[\![\#(p_0, p_1, p_2)]\!]_v = [\![(p_0 \wedge (\neg(p_1 \vee p_2)))]\!]_v$ para toda v. Es decir, $\#$ es expresable en términos de $\wedge$, $\neg$ y $\vee$.

Estos ejemplos son testigos de un resultado muy general, que es consecuencia de la teoría de álgebras de Boole.

Teorema 17. *Todo conectivo se puede expresar en términos de* $\wedge$, $\vee$ *y* $\neg$.

Definición 18. Un conjunto $\mathcal{C}$ de conectivos es ***funcionalmente completo*** si y sólo si todo conectivo es expresable en términos de elementos de $\mathcal{C}$.

Luego, el Teorema 17 dice que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ es funcionalmente completo.

1.5. Ejercicios

1. Dé series de formación de las siguientes proposiciones:

   a) $\big((((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \to p_1\big)$.

   b) $(p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))$ (ojo con la abreviatura).

   c) $\big((p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1\big)$.

2. Demuestre que si φ, ψ y ξ son proposiciones, también lo es $((\varphi \wedge \psi) \to \xi)$.

3. Demuestre que toda $\varphi \in PROP$ tiene tantos "(" como ")". Además, vea que la cantidad de paréntesis ("abre" y "cierra", todos juntos) es igual a doble de la cantidad de conectivos distintos de $\perp$ que ocurren.

4. Demuestre que $(p_0) \notin PROP$.

5. Defina recursivamente una función $\Sigma(\varphi)$ que devuelva una serie de formación de φ para cada $\varphi \in PROP$.

6. Ídem al anterior para "complejidad de φ", donde la complejidad de una proposición viene dada por la cantidad de ocurrencias de conectivos en la proposición.

7. Ídem al anterior para "longitud de φ", considerando a φ como una sucesión de símbolos (incluyendo paréntesis).

8. Se define la noción de ***subfórmula*** de la siguiente manera (recursiva):

   $\boxed{\varphi \in At}$ ψ es subfórmula de φ si $\psi = \varphi$.

   $\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ ψ es subfórmula de $(\varphi \odot \chi)$ si ψ es igual a $(\varphi \odot \chi)$ ó si es subfórmula de φ ó de χ.

   a) Demostrar que si ψ es subfórmula de φ, entonces ψ es un término de la sucesión $\Sigma(\varphi)$ del Ejercicio 5. En general, toda subfórmula aparecerá en cada serie de formación de φ.

b) (*) Encontrar el conjunto A y las funciones $H_\bullet$ del Teorema 6 para esta definición[6] (Ayuda mezquina: $A \neq PROP$).

9. Pruebe el Corolario 10 por inducción en subfórmulas.

10. Determine $\varphi[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$ para $\varphi = ((p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3))$ y $\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to (\neg p_0)))$.

11. Suponga $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ es serie de formación de φ.

    a) Probar que $\varphi_1[\bot/p_0], \dots, \varphi_n[\bot/p_0]$ es serie de formación de $\varphi[\bot/p_0]$.

    b) ¿Vale en general que $\varphi_1[\psi/p_0], \dots, \varphi_n[\psi/p_0]$ es serie de formación de $\varphi[\psi/p_0]$ para todas φ, ψ?

12. Decida si las siguientes funciones de $PROP$ a $\{0,1\}$ son valuaciones:

    a) $[\![\varphi]\!] := 1$ para toda $\varphi \in PROP$.

    b) $[\![\varphi]\!] := 0$ para toda $\varphi \in PROP$.

    c) Dada una asignación v, defino $V : PROP \to \{0,1\}$ como $V(\varphi) := [\![\varphi[\bot/p_0]]\!]_v$. Además de decidir, describa a V con sus palabras. Pregunte a su compañero/a si entiende su definición ⌣̈.

13. Escribamos $\varphi \models \psi$ cuando $\{\varphi\} \models \psi$. Pruebe que la relación así definida ("ser consecuencia de") es transitiva y reflexiva en $PROP$.

14. Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\varphi \models \psi$.

15. Pruebe que $p_0 \not\models (p_0 \wedge p_1)$ y que $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \vee p_2)\} \not\models p_2$.

16. Sea $\varphi \in PROP$. Demostrar que si $\models p \to \varphi$ para todo $p \in At$, entonces $\models \varphi$.

17. Diremos que φ es *(semánticamente) equivalente a* ψ si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. Encontrar proposiciones equivalentes a las siguientes que sólo contengan los conectivos $\to$ y $\neg$:

    a) $(p_0 \wedge p_1)$

    b) $((p_0 \vee p_2) \leftrightarrow p_3)$

18. Demostrar que $\{\to, \bot\}$ y $\{|\}$ son funcionalmente completos.

2. Deducción Natural

Si uno piensa a la lógica como una codificación del razonamiento, entonces debería analizarse de cerca el proceso de realizar inferencias, es decir, obtener conclusiones a partir de premisas de manera *correcta*. Estudiaremos entonces un sistema de deducción (formalizado por G. Gentzen en 1934) que modela el modo de razonamiento (en su faceta proposicional) que se utiliza, por ejemplo, en matemática. Para hacer más simple la notación, utilizaremos una tabla de precedencia para evitar poner paréntesis:

[6] Los ejercicios con una "(*)" son un poco más duros. Por ahí conviene dejarlos para el final.

$$\boxed{\begin{array}{c}\neg\\ \wedge\ \vee\\ \to\\ \leftrightarrow\end{array}}$$

En particular, eliminaremos los paréntesis exteriores de cada fórmula. Así, en vez de

$$\big((p_7 \to \bot) \leftrightarrow (p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1\big)$$

podremos escribir

$$p_7 \to \bot \ \leftrightarrow\ p_4 \wedge \neg p_2 \to p_1.$$

2.1. Reglas de Inferencia

En pocas palabras, un sistema deductivo es mecanismo formal para pasar de algunas proposiciones iniciales ("premisas") a otra ("conclusión") mediante un conjunto de reglas sintácticas. Nuestro objetivo será describir reglas que se adecuen a nuestra noción intuitiva de "razonamiento correcto". En particular, tendremos reglas *de introducción* que a partir de las premisas (por ejemplo, φ y ψ) concluyen una fórmula con un conectivo más (por ejemplo, $\varphi \wedge \psi$); y también reglas *de eliminación* en las que la conclusión se borró alguna conectiva que aparecía en las premisas (por ejemplo pasar de $\varphi \wedge \psi$ a φ). Las dos reglas que ejemplificamos se llaman, respectivamente, *introducción de* $\wedge$ y *eliminación de* $\wedge$ y se pueden representar mediante los dos primeros diagramas de los que siguen:

$$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad\qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\vee E.$$

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I \qquad\qquad \dfrac{\bot}{\varphi}\bot \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}RAA$$

Antes de dar la definición formal de derivación, conviene hacer algún ejemplo para conocer el funcionamiento de la deducción natural de manera intuitiva:

Ejemplo 4. Tratemos de hallar una "codificación" simbólica de una demostración de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$. Para ello, nos fijamos que hay una sola regla que permite deducir una implicación de manera explícita, y es la regla $(\to I)$ ("introducción de $\to$"). Reemplazando,

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi \wedge \psi]_1\\ \vdots\\ \psi \wedge \varphi\end{array}}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

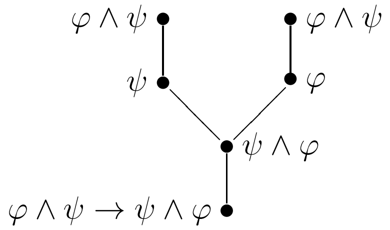
Esto significa que "Si tomando como *hipótesis* $\varphi \wedge \psi$ puedo deducir $\psi \wedge \varphi$, entonces tengo una prueba de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$". Los corchetes subindizados con "1" dicen que en el paso "$(\to I)$" de la derivación *cancelamos* la hipótesis $\varphi \wedge \psi$.

Ahora tenemos que reemplazar los puntos suspensivos por una deducción que lleve de $\varphi \wedge \psi$ a $\psi \wedge \varphi$. Haciendo la misma observación de hace un rato, la única regla que tiene como conclusión una conjunción es la $(\wedge I)$ ("introducción de $\wedge$"). Seguimos completando:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi\wedge\psi]_1\\ \vdots \\ \psi \quad \varphi\end{matrix}}{\psi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi}\to I_1$$

Necesitamos llegar desde nuestra hipótesis $\varphi \wedge \psi$ a cada uno de los términos de la conjunción. Pero para ello, las reglas $(\wedge E)$ ("eliminación de $\wedge$") nos vienen al pelo. Nos hacen falta dos copias de $\varphi \wedge \psi$ a tal fin (una para deducir φ y otra para ψ). No hay problema, porque como sucede en una demostración matemática, cada vez que se hace una suposición, se la puede utilizar tantas veces como uno quiera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi}\to I_1$$



(3)

Este árbol (notar su estructura a la derecha) es una "derivación" de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.

Definiremos a continuación la noción de *derivación*. Como arriba, una derivación será un árbol (i.e., un grafo acíclico) con una raíz distinguida, tal que cada nodo (vértice) está decorado con una proposición[7]. Tomamos la convención de dibujar dichos árboles con la raíz abajo, como a continuación:

$$\begin{matrix}\vdots D\\ \varphi\end{matrix}$$

Las proposiciones que decoran las hojas del árbol son las *hipótesis*, y la proposición que decora la raíz de D será la ***conclusión*** de la derivación y será denotada por $Concl(D)$; por ejemplo, con

$$\begin{matrix}\psi \quad \psi'\\ \vdots D\\ \varphi\end{matrix}$$

indicaremos una derivación entre cuyas hipótesis se encuentran *eventualmente* ψ y ψ'. Si no hace falta poner nombres (por ejemplo, "D", más arriba), simplemente escribiremos

$$\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\psi \quad \psi'\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}$$

Como se habrá notado más arriba, las hipótesis a secas no son de interés, sino el subconjunto las hipótesis *no canceladas*, que definiremos formalmente en un momento (Definición 22).

[7] Notar, de todos modos, el Ejercicio 16 de la Sección 2.4 y sus comentarios.

Definición 19. El conjunto $\mathcal{D}$ de las ***derivaciones*** será el menor conjunto de árboles nodos decorados con proposiciones y con una raíz distinguida tal que:

$\boxed{PROP}$ Todo árbol de un único nodo decorado con $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathcal{D}$, que denotaremos simplemente por "φ".

$$\boxed{\wedge I} \text{ Si } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \text{ y } \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi'\end{array} \text{ están en } \mathcal{D}, \text{ entonces } D'' := \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\, D & \vdots\, D\\ \varphi & \varphi\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \text{ pertenece a } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{\wedge E} \text{ Si } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array} \in \mathcal{D} \text{ entonces } D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E \text{ y } D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E \text{ están en } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{\to I} \text{ Dada } \begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array} \text{ en } \mathcal{D}, \text{ tenemos que } D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I \text{ está en } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{\to E} \text{ Si } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \text{ y } \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi \to \psi\end{array} \text{ están en } \mathcal{D}, \text{ entonces } D'' := \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\, D & \vdots\, D'\\ \varphi & \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E \text{ está en } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{\bot} \text{ Si tenemos } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}, \text{ entonces para toda } \varphi \in PROP,\ D' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\bot \text{ está en } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{RAA} \text{ Dada una derivación } \begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}, D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}RAA \text{ está en } \mathcal{D}.$$

$$\boxed{\vee I} \text{ Si } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}, \text{ entonces } \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\vee I \in \mathcal{D}. \text{ Lo mismo con } \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array} \text{ y } \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\vee I.$$

$$\boxed{\vee E} \text{ Dadas } \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi \vee \psi\end{array}, \begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array} \text{ y } \begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array} \text{ en } \mathcal{D}, \text{ entonces } \dfrac{\begin{array}{ccc} & [\varphi] & [\psi]\\ \vdots\, D & \vdots\, D' & \vdots\, D''\\ \varphi \vee \psi & \chi & \chi\end{array}}{\chi}\vee E \in \mathcal{D}.$$

En las reglas ($\to I$) y (RAA) no es necesario que las hipótesis φ y $\neg\varphi$ (respectivamente) aparezcan en la derivación D. Similarmente, no es necesario que φ ni ψ ocurran explícitamente en la subderivaciones D' y D'' que figuran en ($\vee E$).

Como $\mathcal{D}$ tiene una definición recursiva, podemos establecer análogos a los Teoremas 2 y 6.

Teorema 20 (inducción en derivaciones)**.** *Sea A un predicado definido en $\mathcal{D}$. Luego $A(D)$ es verdadero para toda $D \in \mathcal{D}$ si y sólo si:*

$\boxed{PROP}$ *Si $\varphi \in PROP$, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{\wedge I}$ *Si se dan* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\end{pmatrix}$ *y* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi'\end{pmatrix}$, *entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \varphi & \varphi'\end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I\right)$.

$\boxed{\wedge E}$ *Si se da* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{pmatrix}$, *entonces se dan* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi}\wedge E\right)$, $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi'}\wedge E\right)$.

$\boxed{\to I}$ $A\begin{pmatrix}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{pmatrix}$ *implica* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I\right)$.

$\boxed{\to E}$ *Si se dan* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\end{pmatrix}$ *y* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{pmatrix}$, *entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \varphi & \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\to E\right)$.

$\boxed{\perp}$ *Si tenemos* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \perp\end{pmatrix}$, *entonces para toda $\varphi \in PROP$, se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\perp\right)$.

$\boxed{RAA}$ *Si se da* $A\begin{pmatrix}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{pmatrix}$ *entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}RAA\right)$.

$\boxed{\vee I}$ *Si se da* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\end{pmatrix}$, *entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\vee I\right)$. *Si se da* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \psi\end{pmatrix}$, *entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\vee I\right)$.

$\boxed{\vee E}$ *Si se dan* $A\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi \vee \psi\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{pmatrix}$ *y* $A\begin{pmatrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{pmatrix}$, *entonces se da*

$$A\left(\dfrac{\begin{matrix} & [\varphi] & [\psi]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi \vee \psi & \chi & \chi\end{matrix}}{\chi}\vee E\right).$$

Teorema 21 (recursión en derivaciones)**.** *Sea A un conjunto y sean dadas funciones H_P de $PROP$ en A, $H_{\wedge E1}$, $H_{\wedge E2}$, $H_{\perp}$, H_{RAA}, $H_{\to I}$, $H_{\vee I1}$ y $H_{\vee I2}$ de A en A, $H_{\wedge I}, H_{\to E}$ de $A \times A$ en A y $H_{\vee E} : A^3 \to A$. Luego existe una única función $F : \mathcal{D} \to A$ tal que se cumplen recursiones análogas a las del Teorema 6 según la Definición 19. Es decir, F satisface,*

$$
\begin{array}{ll}
F(\varphi) = H_P(\varphi) & \text{si } \varphi \in PROP \\
F(D) = H_{\wedge I}(F(D_1), F(D_2)) & \text{si } D \text{ se obtiene de } D_1 \text{ y } D_2 \text{ mediante} \\
 & \text{una aplicación de } (\wedge I) \\
F(D) = H_{\wedge E1}(F(D')) & \text{si } D \text{ se obtiene de } D' \text{ mediante una} \\
 & \text{aplicación del primer caso de } (\wedge E) \\
F(D) = H_{\wedge E2}(F(D')) & \text{si } D \text{ se obtiene de } D' \text{ mediante una} \\
 & \text{aplicación del segundo caso de } (\wedge E) \\
\quad\dots & \dots
\end{array}
$$

y así sucesivamente.

Aplicaremos inmediatamente el Teorema de Recursión en Derivaciones en la próxima definición.

Definición 22. El conjunto $Hip(D)$ de las ***hipótesis no canceladas*** de D está dado por la siguiente recursión:

$\boxed{PROP}$ Si $\varphi \in PROP$, $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

$\boxed{\wedge I}$

$$
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\,\wedge I\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}\right) \cup Hip\left(\begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}\right).
$$

$\boxed{\wedge E}$

$$
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\,\wedge E\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\,\wedge E\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}\right).
$$

$\boxed{\to I}$

$$
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}\right) \setminus \{\varphi\}.
$$

$\boxed{\to E}$

$$
Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\right) \cup Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}\right).
$$

$\boxed{\perp}$

$$Hip\left(\begin{array}{c}\vdots \\ \perp \\ \hline \varphi\end{array}\perp\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \perp\end{array}\right)$$

$\boxed{RAA}$

$$Hip\left(\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \varphi\end{array} RAA\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots \\ \psi\end{array}\right) \setminus \{\varphi\}.$$

$\boxed{\vee I}$

$$Hip\left(\begin{array}{c}\vdots \\ \varphi \\ \hline \varphi\vee\varphi'\end{array}\vee I\right) = Hip\left(\begin{array}{c}\vdots \\ \varphi \\ \hline \varphi'\vee\varphi\end{array}\vee I\right) := Hip\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\right).$$

$\boxed{\vee E}$

$$Hip\left(\begin{array}{ccc} & [\varphi] & [\psi] \\ \vdots D_1 & \vdots D_2 & \vdots D_3 \\ \varphi\vee\psi & \chi & \chi \\ \hline & \chi & \end{array}\vee E\right) := Hip(D_1)\cup\big(Hip(D_2)\setminus\{\varphi\}\big)\cup\big(Hip(D_3)\setminus\{\psi\}\big).$$

Notemos que en la aplicación de ($\vee E$), la hipótesis φ se cancela en la segunda subderivación (es decir, D'), pero **no** en las otras (ni en D ni en D''). Lo mismo ocurre con ψ y D''.

Ejemplo 5. Veamos que la derivación que habíamos esbozado de $\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi$ está en $\mathcal{D}$.

1. $\varphi\wedge\psi$ es una derivación por la regla ($PROP$). Tenemos $Concl(\varphi\wedge\psi) = \varphi\wedge\psi$ y $Hip(\varphi\wedge\psi) = \{\varphi\wedge\psi\}$.

2. Como $\varphi\wedge\psi$ es una derivación, puedo aplicar la regla ($\wedge E$) y obtener las derivaciones $D_1 := \dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\wedge E$ y $D_2 := \dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\wedge E$, donde hemos tomado $D = \varphi\wedge\psi$, que cumple con la condición necesaria para aplicar esta regla. La única hipótesis no cancelada de D_1 y D_2 es $\varphi\wedge\psi$.

3. Usando las derivaciones D_1 y D_2 podemos aplicar el caso ($\wedge I$) (nuestras D, D' son D_1, D_2, respectivamente). Obtenemos una nueva derivación

$$D_3 := \begin{array}{cc}\varphi\wedge\psi & \varphi\wedge\psi \\ \vdots D_1 & \vdots D_2 \\ \psi & \varphi \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\psi\wedge\varphi}\end{array}\wedge I \quad = \quad \begin{array}{cc}\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\wedge E & \dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\wedge E \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\psi\wedge\varphi}\end{array}\wedge I.$$

La conclusión de D_3 es $\psi\wedge\varphi$ como se indica, y las hipótesis son las hipótesis de D_1 y D_2 en conjunto. Como sólo está $\varphi\wedge\psi$, queda ella como única hipótesis no cancelada.

4. Este paso es menos trivial, vamos a aplicar $(\to I)$. El caso nos indica que podemos pasar de $\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \vdots\, D_3 \\ \psi \wedge \varphi \end{array}$ a

$$D_4 := \dfrac{\begin{array}{c} [\varphi \wedge \psi]_1 \\ \vdots\, D_3 \\ \psi \wedge \varphi \end{array}}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1 \quad = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi} \wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi} \wedge E}{\psi \wedge \varphi} \wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \psi} \to I_1 \quad ,$$

donde hemos cancelado la hipótesis $\varphi \wedge \psi$. Esta nueva derivación D_4 tiene por hipótesis a las de D_3 menos $\varphi \wedge \psi$, pero como ésta era la única hipótesis de D_3, D_4 tiene todas sus hipótesis canceladas; en símbolos, $\mathit{Hip}(D_4) = \emptyset$, i.e., todas las hipótesis fueron canceladas.

Ejemplo 6. Hallemos una derivación cuyas hipótesis estén todas canceladas y su conclusión sea $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Para demostrar este tipo de proposición, basta ver que si suponemos cierto el antecedente, podemos demostrar el consecuente. Entonces haremos una lista numerada de las hipótesis que utilizamos, que luego serán canceladas mediante la introducción de $\to$. De esta manera, este ejercicio y muchos otros similares se resuelven desde abajo para arriba, como vemos a continuación. Partimos de lo que queremos probar:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \end{array}$$

tomamos el antecedente como hipótesis y lo anotamos para uso futuro:

$$\begin{array}{l} 1.\ \varphi \to \psi \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ (\neg\psi \to \neg\varphi) \end{array}}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Podemos hacer lo mismo ahora con $(\neg\psi \to \neg\varphi)$: sacar el antecedente y usarlo como hipótesis:

$$\begin{array}{l} 1.\ \varphi \to \psi \\[1ex] 2.\ \neg\psi \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi \end{array}}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Recordemos que $\neg\varphi$ es una abreviación de $\varphi \to \bot$, luego podemos hacer una vez más el mismo procedimiento:

$$\begin{array}{l} 1.\ \varphi \to \psi \\[1ex] 2.\ \neg\psi \\[1ex] 3.\ \varphi \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg\varphi} \to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Ahora la tarea se reduce a llegar a $\bot$ usando nuestras tres hipótesis. Ahora comenzamos a trabajar de arriba para abajo: podemos deducir ψ de la primera y la tercera hipótesis:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$
3. φ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\varphi \to \psi]_1}{\psi}\to E \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)}\to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}\to I_1$$

Notemos que en las inferencias subindizadas con 1 y 3 se cancelan las respectivas hipótesis, así que por eso las ponemos entre corchetes (respectivamente subindizados).

De esta ψ y la segunda hipótesis obtenemos $\bot$ y queda todo conectado:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$
3. φ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\varphi \to \psi]_1}{\psi}\to E \qquad [\neg\psi]_2}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)}\to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}\to I_1$$

Ejemplo 7. Hallemos una derivación de $\varphi \to (\psi \to \varphi)$. Como hicimos anteriormente, podemos tratar de derivar $\psi \to \varphi$ tomando como hipótesis a φ. Y a su vez, para derivar $\psi \to \varphi$ suponer ψ y derivar φ. Escribimos la lista de nuestras hipótesis y a lo que queremos llegar:

1. φ
2. ψ

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \to \varphi}\to I_2}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1 \quad .$$

Esperemos un momento: ¡lo que queremos derivar ya es parte de lo que estamos suponiendo! Es decir, podemos dejar la derivación tal como está:

1. φ
2. ψ

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1}{\psi \to \varphi}\to I_2}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1 .$$

Surge la pregunta: ¿qué hipótesis cancelamos en el primer paso? La respuesta es "ninguna", y la moraleja es: en una introducción de "$\to$", no hace falta que la hipótesis a cancelar aparezca en la derivación.

Ejercicio 8. Pensar por qué funciona así esto, dando una demostración de:

Si $x^2 + y^2 \geq 0$ para todo x e y, entonces 8 es múltiplo de 2.

Ejemplo 8. Haremos una derivación que requiere el uso esencial de (RAA), que es la regla menos *intuitiva*[8]. Veamos que hay una derivación de $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ con todas sus hipótesis canceladas. Como antes, podemos tomar como hipótesis el antecedente y tratar de derivar el consecuente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\psi \to \neg\varphi]_1 \\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{array}}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

y otra vez lo mismo:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_2 \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

Ahora estamos trabados, porque no podemos extraer más hipótesis evidentes. Pero podemos "pedir prestada" una $\neg\psi$ (que pensamos utilizar con $\neg\psi \to \neg\varphi$) y cancelarla más tarde:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_2 \qquad \dfrac{\neg\psi \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1}{\neg\varphi} \to E \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

Ahora ya podemos usar la φ que teníamos descolgada.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\varphi]_2 \qquad \dfrac{\neg\psi \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1}{\neg\varphi} \to E}{\bot} \to E \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

Los puntos suspensivos los podemos sacar: notemos que tenemos una $\neg\psi$ sin cancelar y (RAA) nos permite cancelarla si tenemos una derivación con conclusión $\bot$, obteniendo

[8]En la lógica proposicional *intuicionista*, se permite el uso de todas las reglas menos la reducción al absurdo. El Intuicionismo está relacionado con la corriente *constructivista* en matemática (L.E.J. Brouwer, A. Heyting) y tiene importantes consecuencias en ciencias de la computación. Un ejemplo paradigmático de esto es el *Isomorfismo de Curry-Howard*, que muestra que hay una equivalencia entre pruebas intuicionistas y algoritmos.

así ψ (Oh, ¡caramba! ¡Qué coincidencia!).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_2 \qquad \dfrac{[\neg\psi]_3 \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1}{\neg\varphi} \to E}{\bot} \to E}{\psi}\, RAA_3}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1$$

Resulta que en general, (RAA) funciona pidiendo las hipótesis que hagan falta, y luego todo cierra *casi* por arte de magia.

Como se vio más arriba, también se puede derivar $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, pero esta última es "constructiva" (no utiliza (RAA)). En conjunto (y aplicando la regla $(\wedge I)$), hemos derivado $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Ejemplo 9. La regla $(\vee E)$ es un modelo de *prueba por casos*: si puedo probar χ cuando φ es cierta, y también puedo hacerlo cuando ψ es cierta, entonces puedo probar χ bajo la única suposición de que alguna de las dos es cierta (i.e., que $\varphi \vee \psi$ es cierta).

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\neg\varphi]_1}{\bot} \to E}{\psi}\, \bot \qquad [\psi]_2}{\psi} \vee E_{1,2}}{\varphi \to \psi} \to I_3$$

Arriba, en la aplicación de $(\vee E)$, primero se prueba ψ usando como hipótesis al primer término de la disyunción $\neg\varphi$ (cancelándose ésta en esa subderivación) y luego usando hipótesis ψ (que sólo se cancela en la segunda subderivación).

Definición 23. Sean $\Gamma \subseteq PROP$, $\varphi \in PROP$. Decimos que φ ***se deduce de*** Γ (y escribimos "$\Gamma \vdash \varphi$") si y sólo si existe una derivación con conclusión φ tal que todas sus hipótesis no canceladas estén en Γ. Diremos que φ es un ***teorema*** cuando $\emptyset \vdash \varphi$, y abreviaremos por "$\vdash \varphi$".

Dicho más brevemente, $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y $Hip(D) \subseteq \Gamma$, y $\vdash \varphi$ si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y tiene todas sus hipótesis canceladas.

Ejemplo 10. 1. $\Gamma \vdash \varphi$ siempre que $\varphi \in \Gamma$.

En este caso debemos considerar a φ como un elemento de $\mathcal{D}$: tiene como conclusión φ (ella misma) y todas sus hipótesis (viz., $\{\varphi\}$) están en Γ trivialmente.

2. $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$.

Basta ver la regla $(\to E)$ para darse cuenta de esto.

3. $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.

La derivación del Ejemplo 5 tiene todas sus hipótesis canceladas, así que nos sirve.

4. El Ejemplo 9 muestra que $\{\neg\varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \to \psi$.

5. Por el Ejemplo 6 obtenemos $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, y con el Ejemplo 8 conseguimos $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

6. $\Gamma \vdash \bot$ implica $\Gamma \vdash \varphi$ para toda φ en $PROP$.

   Supongamos que hay una derivación $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array}$ con $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y sea $\varphi \in PROP$ arbitraria. Luego, usando $(\bot)$ sabemos que $\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\,\bot$ es una derivación, y por construcción tiene las mismas hipótesis (no canceladas) que D (revisar la Definición 19). Luego, sus hipótesis no canceladas están en Γ y entonces $\Gamma \vdash \varphi$. Como φ era arbitraria, esto vale en general.

Ejemplo 11. Ver que $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$. Procedemos como en el Ejemplo 4: si queremos derivar una implicación, basta conseguir una derivación del consecuente cuyas hipótesis pueden (o no) incluir el antecedente. En nuestro caso, la única hipótesis distinta de tal antecedente (viz., φ) que puede aparecer es $\neg\varphi$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} [\varphi]_1 \quad \neg\varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Pero de φ y $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ podemos derivar $\bot$ mediante una eliminación de "$\to$":

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot} \to E \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Por último, usando la regla $(\bot)$ puedo obtener ψ a partir de $\bot$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot} \to E}{\psi}\,\bot}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Con esto completamos una derivación de $\varphi \to \psi$ con (única) hipótesis no cancelada $\neg\varphi$.

2.2. Teorema de Completitud

Hasta ahora, tenemos dos familias de conceptos aparentemente diferentes entre sí:

Semántica		**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	$\longleftrightarrow$	Teoremas (derivable)
$\models$	$\longleftrightarrow$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	$\longleftrightarrow$	Derivaciones (pruebas formales)

Todos estos conceptos son *equivalentes* en el sentido del siguiente

Teorema 24 (Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional)**.** *Para todos* $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$*, se tiene*

$$\Gamma \models \varphi \textit{ si y sólo si } \Gamma \vdash \varphi$$

Estrictamente hablando, se llama ***completitud*** a la implicación directa (es decir, el "*sólo si*"), mientras que a la vuelta (el "*si*") se la llama ***corrección***, porque asegura que no se pueden deducir cosas falsas.

Teorema 25 (Corrección)**.** *Si* $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Demostración. Probaremos por inducción en derivaciones que el siguiente enunciado

"Para todo Γ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models Concl(D)$",

vale para toda derivación D.

$\boxed{PROP}$ Supongamos $D = \varphi$. Si $Hip(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma$, tenemos $\varphi \in \Gamma$, e inmediatamente $\Gamma \models \varphi$.

$\boxed{\wedge I}$ Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}$ satisfacen la hipótesis inductiva, y supongamos que las hipótesis no canceladas de $D'' := \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots D & \vdots D'\\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I$ están incluidas en Γ. Como $Hip(D'') = Hip(D) \cup Hip(D')$, Γ contiene tanto las hipótesis de D como las de D', así que $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi'$ por hipótesis inductiva. Sea v una asignación que valide[9] Γ. Luego obtenemos $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi']\!]_v = 1$, y por definición de valuación tenemos $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]_v = 1$. Como v era arbitraria, se sigue que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$.

$\boxed{\wedge E}$ Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}$ satisface la hipótesis inductiva y tomemos

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E.$$

Veamos el caso de D_1; sea Γ que contenga $Hip(D_1)$. Como $Hip(D_1) = Hip(D)$, sabemos (por hipótesis inductiva) que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$. Sea v una asignación tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$. Tenemos entonces que $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]_v = 1$, y por definición de valuación, $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Como v era una asignación arbitraria que validaba Γ, esto muestra que $\Gamma \models \varphi$. El caso de D_2 es igual.

[9] Ver el párrafo siguiente a la Definición 12.

$\boxed{\to I}$ Supongamos que $\begin{matrix}\varphi\\ \vdots D\\ \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}$ satisface la hipótesis inductiva.

Veamos que la derivación D' de la derecha también la satisface. Sea Γ conteniendo las hipótesis de D', es decir, Γ contiene las hipótesis de D menos φ. Tomemos ahora $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$; Γ' contiene todas las hipótesis de D. Por hipótesis inductiva, $\Gamma' \models \psi$. Sea v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$. Si suponemos

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]_1\\ \vdots D\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

que $[\![\varphi]\!]_v = 1$, v es también una asignación tal que $[\![\Gamma']\!]_v = 1$, y por ende $[\![\psi]\!]_v = 1$, así que se da $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$. Si $[\![\varphi]\!]_v = 0$ también se da $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$, y en consecuencia $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

$\boxed{\to E}$ Sean $\begin{matrix}\vdots D\\ \varphi\end{matrix}$, $\begin{matrix}\vdots D'\\ \varphi \to \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}$ satisfaciendo la HI. Sea $D'' := \dfrac{\begin{matrix}\vdots D\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots D'\\ \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi} \to E$ y supongamos que Γ contiene $Hip(D'')$. Como $Hip(D'')$ es el conjunto formado por las hipótesis de D y las de D', Γ contiene a estas últimas; por hipótesis inductiva, $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi \to \psi$. Sea v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$. Luego $[\![\varphi]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$. Si $[\![\psi]\!]_v$ fuera 0, tendríamos que $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 0$, una contradicción. En conclusión, debe ser $[\![\psi]\!]_v = 1$ y luego (pues v era arbitraria) $\Gamma \models \psi$.

$\boxed{RAA}$ Sea $\begin{matrix}\neg\varphi\\ \vdots D\\ \bot\end{matrix}$ satisfaciendo la hipótesis inductiva. Sea Γ conteniendo las hipótesis de D' de la derecha; análogamente al caso $(\to I)$, Γ contiene las hipótesis de D menos $\neg\varphi$. Supongamos (por el absurdo) que $\Gamma \not\models \varphi$; luego hay una asignación v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$, y en consecuencia $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1$. En resumen v es una asignación tal que $[\![\Gamma']\!]_v = 1$,

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]_1\\ \vdots D\\ \bot\end{matrix}}{\varphi} RAA_1$$

con $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Γ' contiene todas las hipótesis de D. Por hipótesis inductiva, $\Gamma' \models \bot$. Pero entonces se debería dar $[\![\bot]\!]_v = 1$, una contradicción. En consecuencia, $\Gamma \models \varphi$.

$\boxed{\bot}$ Sea $\begin{matrix}\vdots D\\ \bot\end{matrix}$ que satisfaga la hipótesis inductiva, y sea $\varphi \in PROP$. La derivación $\dfrac{\begin{matrix}\vdots D\\ \bot\end{matrix}}{\varphi} \bot \in \mathcal{D}$ tiene las mismas hipótesis que D. El razonamiento es similar al caso (RAA), pero sin hacerse problemas con hipótesis canceladas. Queda como ejercicio muy fácil para el lector.

$\boxed{\vee I}$ Es análoga a $(\wedge E)$.

$\boxed{\vee E}$ Hay que realizar un análisis por casos similar al de $(\to I)$, pero teniendo en cuenta los valores de verdad de las hipótesis que se cancelan en la segunda y tercera subderivaciones. Queda como ejercicio. $\square$

Demostraremos ahora una serie de lemas que nos conducirán a la Completitud. En toda esta sección, Γ será un subconjunto de $PROP$. Comenzamos con una definición:

Definición 26. Un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es ***inconsistente*** si y sólo si $\Gamma \vdash \bot$. Γ es ***consistente*** si no es inconsistente.

Esto parece un caso particular de lo que se decía más arriba; Γ consistente si no puedo deducir a partir de él *una* ($\bot$) proposición falsa, pero es totalmente general, como lo muestra el siguiente

Lema 27 (de Inconsistencia). *Son equivalentes*

1. Γ *es inconsistente.*
2. *Existe* $\varphi \in PROP$ *tal que* $\Gamma \vdash \neg\varphi$ *y* $\Gamma \vdash \varphi$.
3. *Para toda* $\varphi \in PROP$ *se da* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración. Es obvio que 3 $\Rightarrow$ 2. También 2 $\Rightarrow$ 1 sale fácil: supongamos que $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D' \\ \neg\varphi \end{array}$ tienen sus hipótesis no canceladas en Γ (i.e., $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Hip(D') \subseteq \Gamma$). Luego (teniendo en cuenta que $\neg\varphi = \varphi \to \bot$) la derivación de la izquierda tiene conclusión $\bot$ e hipótesis en Γ. La prueba de 1 $\Rightarrow$ 3 está en el Ejemplo 10 ítem 6.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D' \\ \neg\varphi \end{array}}{\bot} \to E$$

□

Lema 28 (Criterio de Consistencia). *Si hay una asignación v tal que $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, entonces Γ es consistente.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que $\Gamma \vdash \bot$. Por la Corrección de la lógica proposicional, $\Gamma \models \bot$, así que para toda asignación v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$, se debe dar $[\![\bot]\!]_v = 1$. Pero como para toda v, $[\![\bot]\!]_v = 0$, llegamos a una contradicción. □

Ejemplo 12. Probemos que $\Gamma := \{p_0 \to p_1,\ \neg p_2 \to p_0,\ p_5 \wedge \neg p_0\}$ es consistente. Para ello, basta encontrar una asignación que valide dicho conjunto. Utilizaremos el Teorema de Extensión a tal fin.

Sea $f : At \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera: $f(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi = p_2, p_5$. Como $f(\bot) = 0$, existe una valuación $[\![\cdot]\!]_f$ que extiende a f sobre $PROP$. Vemos que esta valuación es de Γ:

$$\begin{aligned}
[\![p_0 \to p_1]\!]_f = 0 &\text{ si y sólo si } [\![p_0]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_1]\!]_f = 0 && \text{por definición de valuación} \\
&\text{si y sólo si } 0 = 1 \text{ y } [\![p_1]\!]_f = 0 && \text{por construcción de } f \\
&\text{si y sólo si nunca.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![p_5 \wedge \neg p_0]\!]_f &= \text{mín}\{[\![p_5]\!]_f, [\![\neg p_0]\!]_f\} && \text{por definición de valuación} \\
&= \text{mín}\{1, [\![\neg p_0]\!]_f\} && \text{por construcción de } f \\
&= \text{mín}\{1, 1 - [\![p_0]\!]_f\} && \text{por Ejercicio 4} \\
&= \text{mín}\{1, 1 - 0\} && \text{por construcción de } f \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\![\neg p_2 \to p_0]\!]_f = 0 &\text{ si y sólo si } [\![\neg p_2]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por definición de valuación}\\
&\text{ si y sólo si } 1 - [\![p_2]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por Ejercicio 4}\\
&\text{ si y sólo si } 1 - 1 = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por construcción de } f\\
&\text{ si y sólo si } 0 = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0\\
&\text{ si y sólo si nunca.}
\end{aligned}
$$

Definición 29. Un conjunto Γ es ***consistente maximal*** si y sólo si es consistente y para todo $\Gamma' \supseteq \Gamma$, si Γ' también es consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$.

Ejemplo 13. Dada una valuación v, el conjunto $\Gamma := \{\varphi \in \mathit{PROP} \ : \ [\![\varphi]\!]_v = 1\}$ es un conjunto consistente maximal. Por el Lema 28, Γ es consistente. Consideremos un Γ' consistente y que contenga a Γ, es decir, $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Ahora, supongamos por el absurdo $\psi \in \Gamma' \setminus \Gamma$. Luego $[\![\psi]\!]_v = 0$ y por ende $[\![\neg\psi]\!]_v = 1$; en conclusión $\neg\psi \in \Gamma$. Pero como $\Gamma \subseteq \Gamma'$, tenemos que Γ' es inconsistente, una contradicción. Luego no hay elementos de Γ' fuera de Γ, $\Gamma = \Gamma'$.

Este ejemplo de conjunto consistente maximal aparenta ser muy específico; sin embargo, como se verá más adelante, tiene toda la generalidad posible.

Lema 30. *Todo conjunto consistente Γ está contenido en uno maximal Γ^*.*

Demostración. Las proposiciones forman un conjunto *numerable*, es decir, se puede hacer una lista $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (con subíndices todos los números naturales) en la cual aparecen todas las proposiciones.

Ejercicio 9. (*) Pensar en un modo de llevar esto a cabo (Ayuda: considerar las proposiciones de complejidad menor que n que tengan grado[10] menor que n. Son finitas, y toda proposición tiene grado y complejidad finitos).

Definiremos una sucesión no decreciente de conjuntos Γ_i tal que la unión es consistente maximal.

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &:= \Gamma,\\
\Gamma_{n+1} &:= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si resulta consistente}\\ \Gamma_n & \text{en caso contrario}\end{cases}\\
\Gamma^* &:= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n
\end{aligned}
$$

Se puede probar por inducción en n que cada Γ_n es consistente (por construcción, Γ_0 es consistente; y si Γ_n es consistente, Γ_{n+1} es consistente, pues alguna de las dos opciones se da). Veamos que Γ^* también lo es.

Por el absurdo, supongamos que $\Gamma^* \vdash \bot$. Luego hay una derivación D con $\mathit{Concl}(D) = \bot$ y $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma^*$. Como $\mathit{Hip}(D)$ es un conjunto finito, hay un N suficientemente grande tal que $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma_{N+1}$; de hecho, tomando $N := \max\{n : \varphi_n \in \mathit{Hip}(D)\}$ tenemos

$$\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma^* \cap \{\varphi_0, \ldots, \varphi_N\} \subseteq \Gamma_{N+1}.$$

Entonces, D es una derivación de $\bot$ con hipótesis en Γ_{N+1}. Esto es un absurdo, ya que Γ_{N+1} es consistente.

[10] Ver Definición 1.2 y el Ejercicio 6 de la sección 1.5.

Γ^* es consistente maximal: para verlo, supongamos $\Gamma^* \subseteq \Delta$ con Δ consistente. Si $\psi \in \Delta$, entonces $\psi = \varphi_m$ para algún $m \geq 0$ (pues en nuestra enumeración aparecían **todas** las proposiciones). Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ y Δ es consistente, $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ es consistente. Luego $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$, i.e. $\varphi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$. Esto muestra que $\Gamma^* = \Delta$. $\square$

Lema 31. *1. Si* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente entonces* $\Gamma \vdash \varphi$*.*

2. Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente entonces* $\Gamma \vdash \neg\varphi$*.*

Demostración. En cada caso hay derivaciones $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ y $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ con hipótesis no canceladas en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$, respectivamente.

Luego las siguientes son derivaciones con hipótesis no canceladas en Γ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,RAA_1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\to I_1,$$

y queda probado el resultado. $\square$

Lema 32. *Si* Γ *es consistente maximal entonces es* ***cerrado por derivaciones*** *(i.e.,* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$*).*

Demostración. Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$, y en busca de un absurdo supongamos que $\varphi \notin \Gamma$. Luego $\Gamma \cup \{\varphi\}$ debe ser inconsistente. Entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$ por el Lema 31, así que Γ es inconsistente por el Lema 27. Absurdo. $\square$

El siguiente lema se puede explicar diciendo que un conjunto consistente maximal ***realiza*** los conectivos $\neg$ y $\to$.

Lema 33. *Sea* Γ *consistente maximal. Luego*

1. *para toda* φ, $\neg\varphi \in \Gamma$ *si y sólo si* [no $\varphi \in \Gamma$].

2. *para todas* φ, ψ, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ *si y sólo si* [$\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$].

Demostración. 1. ($\Rightarrow$) Si $\neg\varphi$ está en Γ, entonces φ no puede puesto que sería inconsistente.

($\Leftarrow$) Si φ no está, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente (por ser Γ maximal). Por los lemas 31 y 32, $\neg\varphi \in \Gamma$.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, veamos que se da la implicación entre corchetes. Para ello, supongamos $\varphi \in \Gamma$. Ahora, con hipótesis $(\varphi \to \psi)$ y φ puedo derivar ψ por el Ejemplo 10(2). Como Γ es cerrado por derivaciones (Lema 32), tenemos que $\psi \in \Gamma$. Obtuvimos entonces [$\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$].

($\Leftarrow$) Supongamos cierta la implicación. Hacemos dos casos.

a) Si $\varphi \in \Gamma$, tenemos que $\psi \in \Gamma$ por la implicación. En particular, $\Gamma \vdash \psi$, así que podemos asegurar $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$. El Lema 32 nos asegura entonces $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

b) Si $\varphi \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi \in \Gamma$ (por lo probado anteriormente). Por el Ejemplo 11 obtenemos $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$, y como es cerrado por derivaciones, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

$\square$

Ejercicio 10. Demostrar que los conjuntos consistentes maximales realizan la conjunción.

Lema 34. *Si* Γ *es consistente, entonces existe una asignación* v *tal que* $[\![\psi]\!]_v = 1$ *para toda* $\psi \in \Gamma$.

Demostración. Por el Lema 30, Γ está contenido en algún Γ^* maximal. Definamos: $f(p_i) := 1$ si $p_i \in \Gamma^*$ y $f(\varphi) := 0$ para toda otra $\varphi \in At$. Por el Teorema 9 (notemos que $\bot \notin \Gamma^*$), f se puede extender a una valuación $[\![\cdot]\!]_f$. Veremos por inducción que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma^*$.

$\boxed{\varphi \in At}$ Vale por construcción de f.

$\boxed{(\varphi \land \psi)}$

$$
\begin{array}{rlll}
[\![(\varphi \land \psi)]\!]_f = 1 & \text{si y sólo si} & [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 1 & \text{por definición de valuación} \\
& \text{si y sólo si} & \varphi, \psi \in \Gamma^* & \text{por hipótesis inductiva} \\
& \text{si y sólo si} & (\varphi \land \psi) \in \Gamma^* & \text{por Ejercicio 10}
\end{array}
$$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$

$$
\begin{array}{rlll}
[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 0 & \text{si y sólo si} & [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 0 & \text{por definición de valuación} \\
& \text{si y sólo si} & \varphi \in \Gamma^* \text{ y } \psi \notin \Gamma^* & \text{por hipótesis inductiva} \\
& \text{si y sólo si} & \text{no se da: } [\varphi \in \Gamma^* \text{ implica } \psi \in \Gamma^*] & \\
& \text{si y sólo si} & (\varphi \to \psi) \notin \Gamma^* & \text{por el Lema 33}
\end{array}
$$

Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, tenemos $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. $\square$

Corolario 35. $\Gamma \nvdash \varphi$ *implica que hay una valuación* v *tal que* $[\![\psi]\!]_v = 1$ *para todo* $\psi \in \Gamma$ *y* $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

Demostración.

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \nvdash \varphi & \text{implica} & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es consistente} \qquad \text{(por el Lema 31)} \\
& \text{si y sólo si} & \text{hay valuación } v \text{ tal que } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \\
& \text{si y sólo si} & \text{hay valuación } v \text{ tal que } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \text{ y } [\![\varphi]\!]_v = 0.
\end{array}
$$

Queda demostrada la implicación. $\square$

Prueba de Completitud. Supongamos $\Gamma \models \varphi$. Luego, para toda valuación v tal que $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, se da $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Esto equivale a decir que no hay valuación tal que $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ y $[\![\varphi]\!]_v = 0$. Por la contrarrecíproca al corolario anterior, obtenemos que no se puede dar $\Gamma \nvdash \varphi$, es decir, obtenemos $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$

2.3. Reglas para la negación y la doble implicación

Tal como definimos la negación y la doble implicación diciendo que son abreviaturas, podemos introducir abreviaturas para las reglas de deducción que los involucran. De este modo, la regla intuitiva de introducción de $\leftrightarrow$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I.$$

que se corresponde con los razonamientos que parten de φ para llegar a ψ y viceversa, será una abreviatura de

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\psi]_2 \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \to \varphi} \to I_2}{\varphi \leftrightarrow \psi} \wedge I.$$

También tendremos reglas de eliminación,

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E \qquad\qquad \dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi} \leftrightarrow E,$$

que abrevian, respectivamente,

$$\dfrac{\varphi \quad \dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \to \psi} \wedge E}{\psi} \to E \qquad\qquad \dfrac{\psi \quad \dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \to \varphi} \wedge E}{\varphi} \to E$$

Por último, definimos abreviaturas para las reglas que involucran a la negación

$$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot} \neg E \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi} \neg I$$

Se puede ver que usando la definición de $\mathcal{D}$ y las funciones *Concl* e *Hip* se obtiene lo siguiente:

$\boxed{\leftrightarrow I}$ Dadas $\begin{matrix}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{matrix}$ y $\begin{matrix}\psi \\ \vdots\, D' \\ \varphi\end{matrix}$ en $\mathcal{D}$, la siguiente

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots\, D \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots\, D' \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I,$$

es una derivación con hipótesis no canceladas las de D **sin** φ junto con las de D' **sin** ψ.

$\boxed{\leftrightarrow E}$ Si $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \psi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}$ son derivaciones, entonces

$$D' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\psi}\leftrightarrow E \qquad\qquad D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\varphi}\leftrightarrow E$$

pertenecen a $\mathcal{D}$ y sus hipótesis no canceladas son las de D y D_1 en conjunto para la primera, y las de D y D_2 en conjunto para la segunda. En símbolos, $Hip(D') = Hip(D) \cup Hip(D_1)$ y $Hip(D'') = Hip(D) \cup Hip(D_2)$.

$\boxed{\neg I}$ Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg I$, es una derivación con hipótesis no canceladas $Hip(D) \setminus \{\varphi\}$ (es decir, las mismas hipótesis de D salvo eventualmente φ).

$\boxed{\neg E}$ Si tenemos derivaciones $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}$ entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\neg E$ pertenece a $\mathcal{D}$, y sus hipótesis no canceladas son las de D y D' en conjunto, $Hip(D) \cup Hip(D')$.

Nota 2. Igual como sucede con $\lor E$, hay que tener mucho cuidado cuando se aplica la regla $\leftrightarrow I$: la hipótesis φ se cancela en la primera subderivación (es decir, D), *pero* **no** *en la segunda (D').*

Como un ejemplo de derivación usando todas las reglas introducidas, demostraremos la equivalencia clásica entre la implicación $\varphi \to \psi$ y la “implicación material”, $\neg\varphi \lor \psi$.

Ejemplo 14. Ver que $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)$. Es natural suponer que la última regla aplicada va a ser la introducción de $\leftrightarrow$, así que de ese modo comenzamos nuestra derivación:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi\to\psi]\\ \vdots\\ \neg\varphi\lor\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi\lor\psi]\\ \vdots\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\varphi\to\psi\leftrightarrow\neg\varphi\lor\psi}\leftrightarrow I$$

El lado izquierdo necesita una aplicación de la reducción al absurdo:

$$D_1 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\varphi\to\psi]_5}{\psi}\to E}{\neg\varphi\lor\psi}\lor I \qquad [\neg(\neg\varphi\lor\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1}{\neg\varphi\lor\psi}\lor I \qquad [\neg(\neg\varphi\lor\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi\lor\psi}RAA_2$$

D_1 tiene como única hipótesis no cancelada a $\varphi \to \psi$ y $Concl(D_1) = \neg\varphi \vee \psi$, así que nos sirve.

El lado derecho es una ligera abreviación de la derivación del Ejemplo 9 (con $(\neg E)$ en lugar de $(\to E)$):

$$D_2 \;:=\; \dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]_5 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_3 \quad [\varphi]_4}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot \qquad [\psi]_3}{\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,\to I_4}\,\vee E_3$$

También D_2 tiene las propiedades requeridas, así que

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi \to \psi]_5 \\ \vdots\, D_1 \\ \neg\varphi \vee \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi \vee \psi]_5 \\ \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\varphi \to \psi \leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi}\,\leftrightarrow I_5$$

es la derivación que andábamos buscando.

2.4. Ejercicios

$\boxed{\text{Ayuda general:}}$ Releer las definiciones 1547 veces.

1. Hallar derivaciones con todas sus hipótesis canceladas que demuestren:
   a) $\vdash \top$.
   b) $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
   c) $\vdash \big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \leftrightarrow \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)$.
   d) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$.
   e) $\vdash \varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$.
   f) $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$.
   g) $\vdash \varphi \vee \psi \;\to\; \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
   h) $\vdash \top \vee \bot$.
   i) $\vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)\big)$.

2. Para las derivaciones de este ejercicio es necesario utilizar la regla (RAA).
   a) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$.
   b) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.
   c) $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \;\to\; \varphi \vee \psi$.[11]
   d) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \bot) \vee (\varphi \leftrightarrow \top)$.
   e) $\vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)$.
   f) $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.

3. Demostrar:
   a) $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$.
   b) $\{\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi\} \vdash \psi$.
   c) (*) $\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$.[12]
   d) $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$.
   e) $\{(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi)\} \vdash \psi$.

4. Probar que $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$, y que si tenemos $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

5. Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:

[11] Resuelto en el Apéndice.
[12] Resuelto en el Apéndice.

a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$

b) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \psi$.

c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.

d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

6. (*) Definir por recursión el *conjunto* de proposiciones que ocurren en una derivación D.

7. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

   a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.

   b) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$.

   c) $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$ (pares implican impares…).

   d) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.

   e) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.

8. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente (ayuda: contrarrecíproca).

9. Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \varphi$ no contiene los conectivos "$\neg$" ni "$\bot$"$\}$ es consistente (Ayuda: construir una v y probar por inducción en subfórmulas que $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).

10. Pruebe que todo Γ consistente maximal realiza la disyunción:

    para toda φ, ψ, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si ($\varphi \in \Gamma$ *ó* $\psi \in \Gamma$).

11. Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).

    a) $\neg p_0$.

    b) p_3.

    c) $p_2 \to p_5$.

    d) $p_1 \vee p_6$.

12. Sea Γ consistente y cerrado por derivaciones. ¿Es maximal?

13. Considere la relación $\Gamma \vdash^+ \varphi$, definida de igual manera que $\Gamma \vdash \varphi$ salvo que se reemplaza la regla $(\to I)$ por la siguiente:

    $\boxed{\to I^+}$ Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$ en $\mathcal{D}$ **tal que** $\boldsymbol{\varphi \in Hip(D)}$, tenemos que $D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$

    pertenece a $\mathcal{D}$.

    Pruebe que $\Gamma \vdash^+ \varphi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$.

14. *a*) (**) Demostrar que si $\vdash \varphi$, entonces existe una derivación de $\neg\neg\varphi$ con todas sus hipótesis canceladas que no utiliza la Regla del Absurdo

b) (¡sin estrella!) Intentar nuevamente el ítem anterior aplicando el siguiente Teorema de *Forma Normal RAA*:

> Para toda derivación D existe una derivación D' con las mismas hipótesis no canceladas y la misma conclusión, tal que D' tiene **a lo sumo una** aplicación de la regla (RAA), exactamente **al final**.

c) (*) Probar el Teorema de Forma Normal (RAA).[13]

d) Probar que todo teorema de la forma $\neg\varphi$ es *intuicionista*, es decir, que se puede demostrar sin usar (RAA).

15. (*) Muestre que son equivalentes:

    a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es inconsistente.

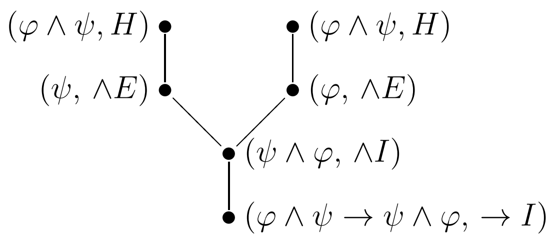
    b) $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

    c) $\vdash \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \neg\varphi_1$.

    Aquí, $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\ldots(\varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)) \ldots)$ (Ayuda: probar un resultado más general, "$\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es inconsistente equivale a $\Gamma \vdash \ldots$", por inducción en n).

16. (*) Dar dos derivaciones D_1 y D_2 tales $Hip(D_1) \neq Hip(D_2)$, pero que tienen el mismo árbol con las mismas decoraciones en $PROP$.

El Ejercicio 16 muestra que nuestra presentación no es 100 % rigurosa, en el sentido que la "implementación" que propusimos para las derivaciones no es completamente fiel. Una que sí lo es se obtiene decorando cada nodo de los árboles con la proposición y la regla que nos hace obtenerla. En el caso de las derivaciones de una sola nodo, la regla puede llamarse "(H)" (por "hipótesis" u "hoja"). Para dar un ejemplo, la derivación (3), tendría la siguiente estructura ahora:



3. Reticulados y Lógica

Un libro para consultar acerca de esta sección es *Introduction to Lattices and Order*, de B. A. Davey y H. A. Priestley (Cambridge Mathematical Texts), en el capítulo 7.

Uno se preguntará ahora, ¿por qué el ínfimo de un álgebra de Boole se denota con el mismo símbolo que la conjunción ("$\wedge$")? Si la lógica corresponde a las álgebras de Boole, ¿que significan los filtros, los filtros primos?

Antes de abordar estas cuestiones, repasemos un par de ejercicios de Deducción Natural, algunos de ellos muy triviales:

[13] Resuelto en el Apéndice.

3.1. Más Ejercicios

Probar las siguientes afirmaciones.

1. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi$.
   b) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.
   c) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \to \chi$.
2. *a*) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$.
   b) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$.
   c) Si $\vdash \chi \to \varphi$ y $\vdash \chi \to \psi$ entonces $\vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$.
3. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$.
   b) $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$.
   c) Si $\vdash \varphi \to \chi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$.
4. *a*) $\vdash \varphi \to \top, \ \vdash \bot \to \varphi$.
   b) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \leftrightarrow \bot$.
   c) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \leftrightarrow \top$.

3.2. *PROP* como poset

Con todos los elementos de la sección anterior, basta hacer un pequeño acto de abstracción para probar que “está todo conectado”. Definamos una relación $\preccurlyeq$ en *PROP* de la siguiente manera:

$$\varphi \preccurlyeq \psi \text{ si y sólo si } \vdash \varphi \to \psi.$$

Ahora bien, esta relación resulta reflexiva por el Ejercicio 1*a* y transitiva por el Ejercicio 1*c*. No es antisimétrica, pues tenemos $(p_0 \wedge \neg p_0) \preccurlyeq \bot$ y $\bot \preccurlyeq (p_0 \wedge \neg p_0)$ y sin embargo $\bot \neq (p_0 \wedge \neg p_0)$. Lo que sí sabemos es que $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$, así que si consideráramos dos proposiciones equivalentes (es decir, que se pueda derivar la proposición que afirma “una si y solo si la otra”) como idénticas, tendríamos la antisimetría.

Definición 36. Sea $\approx$ la relación de equivalencia dada por $\varphi \approx \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Definamos $\overline{\varphi}$ como la clase de equivalencia correspondiente a φ según la relación $\approx$.

Ejercicio 11. Demostrar que la relación $\approx$ es efectivamente una relación de equivalencia.

Llamaremos $\overline{PROP}$ al conjunto de clases de equivalencia de la relación $\approx$, y denotaremos $\overline{\varphi}$ a la clase de equivalencia de φ. Por ejemplo, tenemos $\overline{\bot} = \overline{p_0 \wedge \neg p_0}$ (pues $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$). Para verlo de una forma más simple, usamos el símbolo $\overline{\varphi}$ para poder trabajar normalmente con φ, pero se la puede reemplazar indistintamente por cualquier ψ tal que $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Se puede ahora extender la definición de $\preccurlyeq$ a $\overline{PROP}$, y se hace de la manera obvia.

Definición 37. Diremos que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ si $\varphi \preccurlyeq \psi$.

Para ver que esta definición es *buena*, necesitamos un resultado más:

Ejercicio 12. Supongamos $\varphi \approx \psi$ y $\chi \approx \theta$. Entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$ si y sólo si $\psi \preccurlyeq \theta$. (Ayuda: reemplazando $\approx$ y $\preccurlyeq$ por sus definiciones respectivas, este ejercicio pide demostrar: "Dadas dos derivaciones D y D' con todas sus hipótesis canceladas y conclusión $\varphi \leftrightarrow \psi$ y $\chi \leftrightarrow \theta$, probar: existe $D_1 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_1) = \emptyset$ y conclusión $\varphi \to \chi$ si y sólo si existe $D_2 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_2) = \emptyset$ con conclusión $\psi \to \theta$".)

Las propiedades que vimos de la relación $\preccurlyeq$ siguen valiendo si ponemos "$\overline{\cdots}$" en todos lados; decimos que $\preccurlyeq$ es *preservada* por $\approx$. Por ejemplo, por el Ejercicio 1*a*, tenemos:

Para toda φ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

El Ejercicio 1*c*, por su parte, nos dice que $\preccurlyeq$ es transitiva:

Para todas φ, ψ y χ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y , $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\chi}$ implican , $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$.

Volviendo a la antisimetría, el Ejercicio 1*b* nos dice que si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ obtenemos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Esto quiere decir que $\varphi \approx \psi$ y luego están en la misma clase de equivalencia, $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$:

Si $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$, entonces $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$.

En resumen: $\preccurlyeq$ define una relación de orden en $PROP$, una vez que identificamos cosas equivalentes. ¿Cómo es este poset? (o mejor, ¿para qué nos mandaron a hacer el resto de los ejercicios?).

3.3. El Álgebra de Lindenbaum

Traduciendo los ejercicios restantes, obtenemos lo siguiente. Los Ejercicios 2*a* y 2*b* nos dicen que la conjunción de dos proposiciones es una cota inferior de las mismas:

Para todas φ, ψ, $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\psi}$,

y el Ejercicio 2*c* dice que es mayor o igual que cualquier cota:

Si $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\psi}$, entonces $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Juntando todo, tenemos que efectivamente $\overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo entre $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ en $\overline{PROP}$. Con esto hemos demostrado que es lícito escribir $\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$.

Por otro lado, traduciendo correspondientemente los Ejercicios 3 deducimos que $\vee$ nos fabrica el supremo, y se puede ver que distribuye con el ínfimo:

Ejercicio 13. Probar que efectivamente $\vee$ distribuye con $\wedge$ en $\overline{PROP}$

Por último, viendo los Ejercicios 4*a*, 4*b* y 4*c* obtenemos las siguientes propiedades:

Para toda φ, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\top}$ y $\overline{\bot} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

$\overline{\varphi} \wedge \overline{\neg\varphi} = \overline{\bot}$, $\overline{\varphi} \vee \overline{\neg\varphi} = \overline{\top}$.

Es decir, $\overline{\top}$ y $\overline{\bot}$ son respectivamente los elementos máximo y mínimo de $\overline{PROP}$, y $\overline{\neg\varphi}$ cumple el rol de complemento. En suma, no sólo $\overline{PROP}$ es un poset, sino que también es un álgebra de Boole $\langle \overline{PROP}, \wedge, \vee, \neg, \overline{\bot}, \overline{\top} \rangle$, que se llama *álgebra de Lindenbaum*.

Pero las "coincidencias" no terminan aquí. Definamos $\overline{\Gamma} := \{\overline{\varphi} : \varphi \in \Gamma\}$.

Lema 38. Γ *es inconsistente si y sólo si hay elementos de* $\overline{\Gamma}$ *cuyo ínfimo (en* $\overline{PROP}$*) es* $\overline{\bot}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Como Γ es inconsistente, tenemos una derivación D con $\mathit{Hip}(D) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ y $\mathit{Concl}(D) = \bot$. Pero entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \bot$, y esto es lo mismo que $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \ \rightarrow \ \bot$. Además sabemos (por la regla ($\bot$)) que $\vdash \bot \ \rightarrow \ \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, así que tenemos en resumen $\overline{\bot} = \overline{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que hay $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ tales que $\overline{\bot} = \overline{\varphi}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\varphi}_n$. Entonces sabemos que $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \leftrightarrow \bot$, y en particular $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \bot$ (usando la regla ($\wedge E$) o ($\leftrightarrow E$) según consideremos a $\leftrightarrow$ como una definición o un nuevo conectivo, respectivamente). Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \bot$, y en consecuencia $\Gamma \vdash \bot$. $\square$

Otro resultado es el siguiente:

Lema 39. *Si Γ es cerrado por derivaciones entonces $\overline{\Gamma}$ es un filtro en $\overline{PROP}$.*

Demostración. Supongamos que Γ es cerrado por derivaciones. Para ver que $\overline{\Gamma}$ es un filtro, basta ver que

- Si $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$ entonces $\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$.
- $\overline{\Gamma}$ es creciente. Es decir, si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ y $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}$.

Necesitaremos una cuentita auxiliar.

Afirmación. *Supongamos $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$. Si Γ es cerrado por derivaciones, entonces $\varphi \in \Gamma$.*

Prueba de la Afirmación. Si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$, existe $\chi \in \Gamma$ tal que $\overline{\chi} = \overline{\varphi}$. Es decir, hay una derivación D con conclusión $\chi \leftrightarrow \varphi$ y todas sus hipótesis canceladas. Luego,

$$\dfrac{\chi \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \chi \leftrightarrow \varphi\end{array}}{\chi \rightarrow \varphi}\,\wedge E}{\varphi}\rightarrow E$$

es una derivación con única hipótesis no cancelada χ (que está en Γ) y conclusión φ, así que $\Gamma \vdash \varphi$ y como es cerrado por derivaciones, $\varphi \in \Gamma$. $\square$

Supongamos ahora que $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$. Por la Afirmación sabemos que $\varphi, \psi \in \Gamma$; entonces hay una derivación con hipótesis en Γ y conclusión $\varphi \wedge \psi$ (por la regla ($\wedge I$)). Entonces $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ y luego $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, con lo que probamos la primera parte

Para la segunda condición de filtro, supongamos $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ y $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$. Por la Afirmación y puesto que $\approx$ preserva $\preccurlyeq$, puedo eliminar las barras y obtenemos $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi \preccurlyeq \chi$, donde esta última equivale a $\vdash \varphi \rightarrow \chi$. Pero entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$ y luego $\Gamma \vdash \chi$ pues φ pertenecía a Γ. Nuevamente, como Γ es cerrado por derivaciones, $\chi \in \Gamma$ y luego $\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}$. $\square$

La vuelta del lema no es cierta así como está, pero vale si se reemplaza la segunda condición por una más fuerte. Diremos que Γ es ***cerrado por*** $\approx$ si $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi \approx \psi$ entonces $\psi \in \Gamma$.

Ejercicio 14. Probar que si $\overline{\Gamma}$ es un filtro y Γ es cerrado por $\approx$ entonces Γ es cerrada por derivaciones.

Corolario 40. *Si Γ es cerrado por derivaciones y consistente, entonces es un filtro propio.*

Demostración. Ejercicio (ayuda: un filtro es propio si no contiene al elemento mínimo). $\square$

Como golpe de gracia, obtenemos

Lema 41. *Γ es consistente maximal implica $\overline{\Gamma}$ es un filtro primo.*

Demostración. Supongamos Γ es consistente maximal. Como Γ es cerrado por derivaciones y consistente, ya sabemos que es un filtro propio. Para ver que es primo, basta probar que para todo $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ en $\overline{PROP}$, $\overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$ si y sólo si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ ó $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$. Pero esto último es inmediato por el Ejercicio 10 de la sección 2.4. $\square$

Teorema 42. *Suponga que Γ es cerrado por $\approx$. Luego Γ es consistente maximal si y sólo si $\overline{\Gamma}$ es un filtro primo.*

Demostración. Queda como ejercicio. $\square$

3.4. Algunos Comentarios

El álgebra de Lindenbaum que definimos está basada exclusivamente en nociones sintácticas. Podemos definir otra álgebra usando la relación $\sqsubseteq$ dada por: $\varphi \sqsubseteq \psi$ si y sólo si $\models \varphi \to \psi$, que correspondería a las nociones semánticas. Se puede dar una nueva prueba de la completitud de la lógica proposicional usando estas dos álgebras, que resultan ser isomorfas, y en las que los filtros primos son la realidad subyacente a conjuntos consistentes maximales (por el lado sintáctico) y valuaciones (por el lado semántico). Estas ideas se generalizan a la lógica de primer orden, que incorpora los cuantificadores $\exists$ y $\forall$.

3.5. Ejercicios

1. Supongamos $\varphi \approx \psi$ y $\chi \approx \theta$. Entonces $\varphi \wedge \chi \approx \psi \wedge \theta$.

2. Encontrar Γ y φ tales que $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ pero $\varphi \notin \Gamma$.

3. ¿Son los elementos de $\overline{At}$ átomos del álgebra de Boole $\overline{PROP}$?

4. *a*) Sea $h : \overline{PROP} \to \mathbf{2}$ un homomorfismo. Probar que la función $v : PROP \to \{0, 1\}$ definida como $[\![\varphi]\!]_v := h(\overline{\varphi})$ es una valuación.

   b) Probar que toda valuación se obtiene de esa manera.

5. *a*) Sean $\varphi, \psi \in PROP$ tales que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ pero $\overline{\varphi} \neq \overline{\psi}$. Demostrar que si p es un átomo que no ocurre en φ ni en ψ, entonces $\nvdash \varphi \vee (p \wedge \psi) \to \varphi$ y $\nvdash \psi \to \varphi \vee (p \wedge \psi)$. (Ayuda: usar Completitud).

   b) Probar que $\overline{PROP}$ es densa, es decir, si $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y $\overline{\varphi} \neq \overline{\psi}$ entonces existe $\overline{\chi} \in \overline{PROP}$ distinta de las anteriores tal que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\psi}$.

   c) Concluir que el álgebra de Boole $\overline{PROP}$ no tiene átomos, y por ende no es isomorfa a $\mathcal{P}(X)$ para ningún X.

4. Axiomatización[14]

Estudiaremos un par (de dos o más) de conceptos relacionados con la axiomatización de teorías (proposicionales, en nuestro caso).

Definición 43. Una ***teoría*** será un subconjunto de $PROP$.

La tarea de hombres y mujeres de ciencia en general consiste en analizar y organizar el conjunto "total" de afirmaciones sobre el Mundo (una pequeña fracción de ellas podría ser la que se halla antes del Ejemplo 3). Considerando a una asignación v como un "mundo posible", la teoría relacionada con ese mundo es el conjunto consistente maximal $\Gamma_v := \{\varphi : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Para poder estudiar dicha teoría, conviene "simplificarla" para hacerla más manejable. Por ejemplo, sabemos que si φ y ψ están en Γ_v, entonces $\varphi \wedge \psi$ está; así que para "entender" a Γ_v tener a φ, ψ y a $\varphi \wedge \psi$ es redundante, ya que sabemos que una vez que tenemos a las dos primeras podemos deducir la tercera. Sería de interés encontrar un conjunto de proposiciones de las que se pueda deducir lo mismo que se puede deducir de Γ_v, pero que sea más resumido. Las siguientes definiciones capturan algunos de dichos conceptos.

Definición 44.
1. Γ es ***independiente*** si y sólo si para toda $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$.
2. φ es ***indecidible*** para Γ si $\Gamma \nvdash \varphi$ ni $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.
3. Sea Γ una teoría. Una teoría Δ es un conjunto de *axiomas para* (o que *es equivalente a*) Γ, si para toda $\varphi \in PROP$ se da $[\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\Delta \vdash \varphi]$.

Proposición 45. *Si para toda $\varphi \in \Gamma$, φ es indecidible para $\Gamma \setminus \{\varphi\}$, entonces Γ es independiente.*

Demostración. Estamos diciendo en las hipótesis que para toda φ se dan $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$ y $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \neg\varphi$. En particular, podemos afirmar "para toda φ, $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$", que es lo mismo que dice la Definición 44. □

Damos seguidamente un criterio para decidir si una proposición es indecidible para una teoría.

Lema 46. *Si hay asignaciones v_0, v_1 de Γ tales que $v_0(\varphi) = 0$, $v_1(\varphi) = 1$, entonces φ es indecidible para Γ.*

Demostración. Probamos la contrarrecíproca, es decir, supongamos que φ es decidible para Γ. Como primer caso, supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$. Por la Corrección de la lógica proposicional, tenemos que $\Gamma \models \varphi$ y por ende toda asignación que valida Γ valúa φ en 1, así que no se puede dar el antecedente. En segundo caso, si $\Gamma \vdash \neg\varphi$, tenemos $\Gamma \models \neg\varphi$ y luego toda asignación v que valide Γ hará $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1$, y por definición de valuación, $[\![\varphi]\!]_v = 0$, cosa que también contradice el antecedente. □

Otra propiedad interesante del conjunto Γ_v es la siguiente consecuencia del Ejemplo 13 y el Lema 33: para toda φ, $\Gamma_v \vdash \varphi$ ó $\Gamma_v \vdash \neg\varphi$. Es decir, Γ_v "decide" cualquier proposición: una vez que supusimos Γ_v, la verdad o falsedad de cada φ (en términos de derivabilidad) queda determinada.

[14] Bonus Track.

Definición 47. Una teoría Γ es ***completa*** si y sólo si para toda $\varphi \in PROP$, $\Gamma \vdash \varphi$ ó $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

En la terminología de la Definición 44, una teoría es completa si no hay proposición indecidible para ella. Nuestros primeros ejemplos de conjuntos completos son los obvios.

Ejemplo 15. 1. $\{\bot\}$ es completo.

Queda como ejercicio fácil (ver el Lema 27);

2. Si Γ es consistente maximal, entonces es completo.

   Una aplicación trivial del Lema 33.

Ejemplo 16. (Uno no tan obvio). El conjunto $\Pi := \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ es completo (y consistente). Sea $\varphi \in PROP$ y supongamos que $\Pi \nvdash \varphi$. Entonces por Completitud de la lógica proposicional, $\Pi \not\models \varphi$ y en consecuencia hay una asignación v que valida Π tal que $[\![\varphi]\!]_v = 0$, es decir, $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1$. Por otro lado, si v_1 y v_2 son asignaciones que vaildan Π, entonces $v_1(p_i) = v_2(p_i) = 1$ para todo p_i, así que coinciden en At y en consecuencia son iguales, $v_1 = v_2$. Como hay una única asignación que valida Π, entonces decir "hay una asignación v que valida Π tal que $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1$" es lo mismo que decir "para toda asignación v que valida Π, $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1$" y esto último equivale a $\Pi \models \neg\varphi$. Usando completitud nuevamente, obtenemos $\Pi \vdash \neg\varphi$.

Las teorías completas y consistentes son muy especiales, ya que para ellas el Lema 30 vale en una forma mucho más fuerte.

Teorema 48. *Γ es consistente y completa si y sólo si existe un único Γ^* consistente maximal que lo contiene.*

Demostración. Probaremos que las respectivas negaciones son equivalentes.

($\Rightarrow$) Sabemos que hay por lo menos un consistente maximal que lo contiene. Supongamos que hubiera dos distintos Γ_1 y Γ_2. Sabemos que hay una $\varphi \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$,

Ejercicio 15. ¿Por qué?

así que en particular $\varphi \notin \Gamma_2$, y por el Lema 33, $\neg\varphi \in \Gamma_2$. Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sería inconsistente, y por ende Γ_2 lo sería (pues $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma_2$), absurdo. Si $\Gamma \vdash \neg\varphi$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sería inconsistente, y por ende Γ_1 también, otro absurdo. Luego Γ no puede ser completo.

($\Leftarrow$) Supongamos que Γ es incompleto y entonces hay una φ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$ y $\Gamma \nvdash \neg\varphi$. Por las contrarrecíprocas al Lema 31, tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$ deben ser consistentes, así que por el Lema 30 deben haber conjuntos consistentes maximales que contengan a cada uno. Pero no pueden ser iguales ya que en uno está $\neg\varphi$ y en el otro está φ (y ambas no pueden pertenecer simultáneamente a un conjunto consistente). □

Este teorema refleja en alguna medida una de las características que deseábamos cumpla nuestro "resumen" de las verdades de un mundo posible: si nuestro conjunto reducido de afirmaciones es completo, determina totalmente el conjunto total de afirmaciones.

Por último enunciamos sin prueba un teorema sobre conjuntos independientes de axiomas.

Teorema 49. *Toda teoría admite un conjunto independiente de axiomas.*

Ejemplo 17. Para el conjunto $\{(p_0 \wedge p_1), (p_3 \to p_1), (p_1 \vee p_2)\}$, un conjunto de axiomas independientes es $\{p_0, p_1\}$. Otro posible es $\{p_0 \wedge p_1\}$.

Resumiendo esta sección: para cada "mundo posible" (léase, asignación) su teoría es completa y se puede elegir un conjunto de axiomas sin redundancia (léase, independiente) para ella.

Ejemplo 18. El conjunto Π del Ejemplo 16 es (además de completo y consistente) independiente. Pues para cada n, la función $v : At \to \{0, 1\}$ definida de la siguiente manera

$$v(\varphi) := \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi = p_n, \bot \\ 1 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

asignación v que valida $\Pi \setminus \{p_n\}$ y tal que $[\![p_n]\!]_v = 0$, así que $\Pi \setminus \{p_n\} \not\models p_n$, y por Corrección, $\Pi \setminus \{p_n\} \nvdash p_n$.

4.1. Ejercicios

1. Mostrar que $p_1 \to p_2$ es indecidible para $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_1\}$.

2. Hallar conjuntos independientes que sean equivalentes a los siguientes

   a) $\{p_0, p_1 \vee p_3, p_4\}$.
   b) $\{p_1,\ (p_1 \wedge p_2 \to p_3)\ ,\ (p_1 \to p_2)\}$.
   c) $\{p_1,\ (p_1 \wedge p_2 \to p_3)\ , p_3\}$.
   d) $\{(p_1 \to p_3), (p_1 \wedge p_2 \to \neg p_3), p_2\}$.
   e) $\{p_1, (p_1 \wedge p_2), (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3), \dots\}$.

3. Hallar dos ejemplos de conjuntos independientes, consistentes y completos (Ayuda: usar el Ejemplo 16). Justificar.

A. Apéndice: Algunos ejercicios (difíciles) resueltos

Teorema 50 (Forma Normal (RAA))**.** *Para toda derivación D existe una derivación D' con las mismas hipótesis no canceladas y la misma conclusión, tal que D' tiene* a lo sumo una *aplicación de la regla* (RAA)*, exactamente* al final.

Demostración. En primer lugar, para cualquier D que no incluya la regla (RAA) podemos tomar simplemente $D' := D$. Eliminado este caso trivial, vamos a probar por inducción en derivaciones que siempre podemos obtener una D' con *exactamente* una aplicación de dicha regla, al final de D'. Para aplicar el razonamiento inductivo, dividiremos en casos de acuerdo a cuál es la última regla de inferencia que se utiliza en D.

$\boxed{PROP}$ Si $D = \varphi$ tomo como D' la siguiente derivación: $\dfrac{\dfrac{\varphi \quad [\neg\varphi]_1}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\, RAA_1$.

$\boxed{\wedge I}$ Supongamos que la derivación es de la forma $\dfrac{\begin{matrix}\vdots D_1 \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots D_2 \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge I$; por hipótesis inductiva sabemos que hay derivaciones en forma normal (RAA) de φ y ψ, es decir, derivaciones

$$\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\, D_3\\ \dfrac{\bot}{\varphi}\,RAA\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}[\neg\psi]\\ \vdots\, D_4\\ \dfrac{\bot}{\psi}\,RAA\end{array}$$

que satisfacen la conclusión del teorema. Es decir, D_3 y D_4 no utilizan la regla (RAA). Usaremos estas derivaciones para conseguir la que buscamos.

Comenzaremos reemplazando cada ocurrencia de $\neg\varphi$ como una hipótesis no cancelada de D_3 por la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1\psi}{\varphi\wedge\psi}\wedge I\qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1$$

De esta manera obtenemos una derivación:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1\psi}{\varphi\wedge\psi}\wedge I\qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1\\ \vdots\, D_3\\ \bot\end{array}\qquad \text{y luego}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1[\psi]_2}{\varphi\wedge\psi}\wedge I\qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1\\ \vdots\, D_3\\ \bot\end{array}}{\neg\psi}\neg I_2$$

Reemplazamos ahora cada ocurrencia de $\neg\psi$ como una hipótesis no cancelada de D_4 por la segunda derivación y obtenemos una derivación de $\varphi\wedge\psi$ que tiene una única aplicación de (RAA), exactamente al final:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1[\psi]_2}{\varphi\wedge\psi}\wedge I\qquad [\neg(\varphi\wedge\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1\\ \vdots\, D_3\\ \bot\end{array}}{\neg\psi}\neg I_2\\ \vdots\, D_4\\ \bot\end{array}}{\varphi\wedge\psi}RAA_3$$

$\boxed{\wedge E}$ Hacemos el mismo procedimiento; el esquema general que se obtiene es el siguiente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E \qquad [\neg\varphi]_2}{\bot}\neg E}{\neg(\varphi\wedge\psi)}\neg I_1 \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\, RAA_2$$

$\boxed{\to I}$ Es análogo a los anteriores, con una salvedad: partimos de una derivación de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D_1\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to I$ y por hipótesis inductiva sabemos que hay una derivación en forma normal (RAA) de ψ *con la hipótesis adicional* φ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\psi] \quad \varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\psi}\, RAA$$

Usamos esta D.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]_1}{\varphi\to\psi}\to I \qquad [\neg(\varphi\to\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\neg\psi}\neg I_1 \qquad [\varphi]_2 \\ \vdots\, D \\ \bot\end{array}}{\psi}\bot}{\varphi\to\psi}\to I_2 \qquad [\neg(\varphi\to\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\varphi\to\psi}\, RAA_3$$

Los otros casos quedan como ejercicio (ahora fácil). $\square$

Ejercicio. Probar $\vdash \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi) \ \to\ \varphi\vee\psi$.

Demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_1 \quad [\neg\psi]_2}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}\,\wedge I \qquad [\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)]_4}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,RAA_1}{\varphi\vee\psi}\,\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_3}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,RAA_2}{\varphi\vee\psi}\,\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_3}{\bot}\,\neg E}{\varphi\vee\psi}\,RAA_3}{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi) \;\to\; \varphi\vee\psi}\,\to I_4$$

$\square$

Ejercicio. Probar $\vdash \varphi\vee\psi \;\leftrightarrow\; ((\varphi\to\psi)\to\psi)$.

Demostración. La derivación buscada es

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi\vee\psi]\\ \vdots\, D_1\\ (\varphi\to\psi)\to\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(\varphi\to\psi)\to\psi]\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\vee\psi\end{array}}{\varphi\vee\psi \;\leftrightarrow\; ((\varphi\to\psi)\to\psi)}\,\leftrightarrow I$$

donde D_1 y D_2 vienen dadas por:

$$D_1 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{[\varphi]_2[\varphi\to\psi]_1}{\psi}\,\to E \qquad [\psi]_2}{\psi}\,\vee E_2}{(\varphi\to\psi)\to\psi}\,\to I_1$$

$$D_2 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3}{\varphi\vee\psi}\,\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_4}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot}{\varphi\to\psi}\,\to I_3 \qquad (\varphi\to\psi)\to\psi}{\psi}\,\to E}{\varphi\vee\psi}\,\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_4}{\bot}\,\neg E}{\varphi\vee\psi}\,RAA_4$$

$\square$

Ejercicio. Probar $\{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \theta)$.

Demostración.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi$}
\AxiomC{$[\varphi]_1$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$}
\AxiomC{$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \theta$}
\AxiomC{$[\varphi]_2$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$}
\AxiomC{$[\psi]_1 [\theta]_2$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\UnaryInfC{$\psi \wedge \theta$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$}
\RightLabel{$\vee E_2$}
\TrinaryInfC{$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$}
\RightLabel{$\vee E_1$}
\TrinaryInfC{$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$}
\end{prooftree}
$$

$\square$

Índice alfabético