Conjuntoteoría:

- Predicados, Clases, Relaciones de clase, funciones de clase.

Predicado: fórmula con algunas variables libres "distinguidas" $\underbrace{}_{\text{informal}}$

Ejemplo: $P(x) := x \notin x$. $(\neg\, x \in x)$.

$P'(x) := x \in a$ (en un contexto donde hay una variable a)

$(\varphi(x,a) := x \in a)$

$C := \{x : P(x)\}$ ¿qué es esto? ¿$V := \{x : T\}$?

No se puede escribir "$C \in a$". ("$C \notin x$" etc)

Sin embargo, "$a \in C$" sí

$a \in C$ es $P(a)$

Clase: objetos $\{x : P(x)\}$ con P un predicado unario.

Si $D := \{x : Q(x)\}$, podemos escribir.

$$C \cap D = \{x : P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$C \cup D = \{x : P(x) \vee Q(x)\}$$

Son notaciones eliminables.

"$C = D$" se prueba $\forall x\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$.

Si en un contexto puede probar $\forall z: P(z) \leftrightarrow z \in b$

entonces decimos que "$\{x : P(x)\} = b$"

y también que "$\{x : P(x)\}$ existe"

$$\forall x \forall \bar{x} \exists s : \forall y (y \in s \leftrightarrow \underbrace{\varphi(y,\bar{x})}_{P(y)} \wedge y \in x)$$

Existe $\{y : P(y) \wedge y \in x\}$

"Para toda clase C, y conjunto x, $x \cap C$ es un conjunto"

Relaciones de clase: Predicado con 2 variables distinguidas.

Ejemplo: $x \subseteq y := \forall z\,(z \in x \to z \in y)$.

Funciones de clase:

Axioma de Par: $\exists c\, \forall z\,(z = x \vee z = y \to z \in c)$

Axioma de Par fuerte: $\exists c\, \forall z\,($ " " $\leftrightarrow$ " $)$

Corolario: $\exists! c\, \forall z\,($ " " $\leftrightarrow$ " $)$

Puedo definir la función de clase $F(x,y) :=$ el único c de arriba.

Notación: $c = \{x, y\}$.

¡Ojo! "No existen" ni su dominio ni su codominio.
Nuevamente necesitamos que sea eliminable, bien definida

$\to$ Es una relación de clase tq la "funcionalidad" es Teorema.

Puedo decir $\{z : \exists x\,(x \in C \wedge z = F(x))\}$

Notación: $F``C = F[C] = \{F(x) : x \in C\}$.

$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x,y\}\}$ ~~donde~~ $\{x\} = \{x, x\}$.

Axioma de Reemplazo: (Fraenkel)

$$\forall x, \bar{x} : (\forall y \in x\, \exists! z : \psi(y,z,\bar{x})) \to \exists r : \forall y \in x\, \exists z (\psi(y,z,\bar{x}) \wedge z \in r)$$

$z = F(y)$ "Existe $F[x]$"

Ejemplo: $\{\{y\} : y \in x\}$ es un conjunto.

Teorema: $(ZF^- - P)$ $A \times B := \{z : \exists a\, b\,(a \in A \wedge b \in B\ z = \langle a, b\rangle)\}$ existe (si A y B son conjuntos).

Prueba: Sea $b \in B$ arbitrario. Consideremos la función de clase $x \xmapsto{F} \langle x, b\rangle$. Por Reemplazo, $F``A$ es conjunto

$\{z : \exists a \in A\, (z = \langle a, b\rangle)\} =: G(b)$

AHORA la asignación $b \longmapsto G(b)$ está bien def.
así que por Reemplazo, $G``B$ es conjunto.

$G``B = \{G(b) : b \in B\} = "\{A \times \{b\} : b \in B\}"$

Axioma de Unión: Existe $\{z : \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}$ $!! = \bigcup x$.

Listo: $A \times B = \bigcup G``B$

- Relación binaria (conjunto!): (hecho de pares).
- función (conjunto).
- Relaciones / funciones entre A y B ($\subseteq A \times B$).
- " sobre A ($\subseteq A \times A$)

Propiedades de relaciones sobre A

Reflexiva, Transitiva, antisimétrica, Totales

$\underbrace{\text{Reflexiva, Transitiva}}_{\text{pre orden } (\leq)}$

$\underbrace{\text{Reflexiva, Transitiva, antisimétrica}}_{\text{orden parcial (laxo)}}$

$\underbrace{\text{Reflexiva, Transitiva, antisimétrica, Total}}_{\text{orden Total / lineal (cadena)}}$

Elemento minimal: "nadie debajo" a es minimal si $\neg \exists x : x R a \wedge x \neq a$

- R es bien fundada si todo $\emptyset \neq X \subseteq A$ tiene elemento minimal.

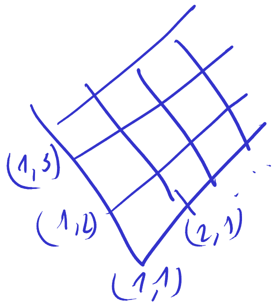
irreflexiva, Transitiva, Total, bien fundada

$\underbrace{\text{irreflexiva, Transitiva}}_{\text{orden parcial estricto } (<)}$

$\underbrace{\text{irreflexiva, Transitiva, Total}}_{\text{orden total estricto}}$

$\underbrace{\text{irreflexiva, Transitiva, Total, bien fundada}}_{\text{buen orden (estricto)}}$

Ejemplos:
- $(\mathbb{N}, <)$ buen orden
- $(\mathbb{R}^{\geq 0}, <)$ orden total estricto.
- $(\mathbb{N}, <) \times (\mathbb{N}, <)$



- $(\mathbb{N}_0, \prec) := \underset{1}{\bullet} < \underset{2}{\bullet} < \underset{3}{\bullet} < \cdots \quad \underset{0}{\bullet}$

<u>Definición</u>: • x es <u>transitivo</u> si $\forall y, z$, $z \in y \in x \to z \in x$

$(\text{i.e. } \forall y.\ y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$

• x es <u>ordinal</u> sii x es transitivo y está bien ordenado por $\in$

R reflexiva sii $\forall x (x \in A \to (x,x) \in R)$.

Si R tiene rel. de clase $\forall x (x \in A \to R(x,x))$

"$\subseteq$ es reflexiva" $\forall x\ x \subseteq x$

$\forall x \forall z (z \in x \to z \in x)$