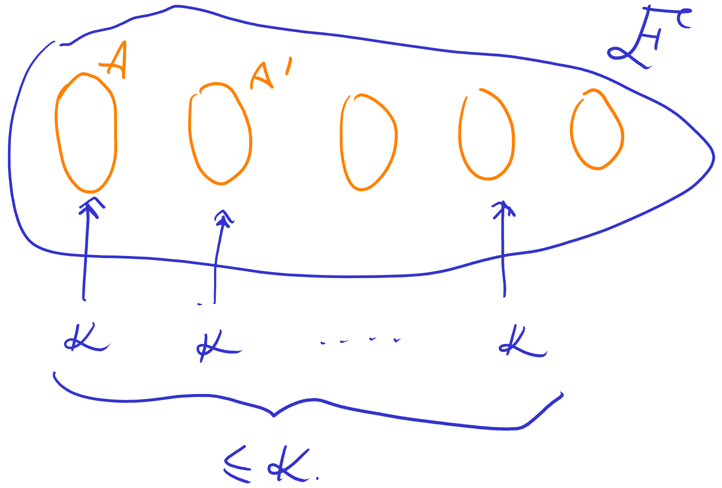
Conjunteoría

18/04/2022

Teorema (AC) Sea $\mathcal{F}$ familia tq $|\mathcal{F}| \le \kappa$ y $\forall A \in \mathcal{F}$, $|A| \le \kappa$. Entonces $|\bigcup \mathcal{F}| \le \kappa$.

Recordar: si $f : B \to A$ suryección, B bien ordenable. Entonces A bien ordenable y $|A| \le |B|$.

Prueba (Teorema):



$\kappa =_c \kappa \times \kappa \overset{G}{\twoheadrightarrow} \bigcup \mathcal{F}$

Por (AC) $\exists F : \mathcal{F} \longrightarrow {}^{\kappa}(\bigcup \mathcal{F})$ tq $F(A)$ es suryección de κ en A. Además hay suryección $h : \kappa \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

$(\mathcal{F}' = \{ Surj(\kappa, A) : A \in \mathcal{F} \})$

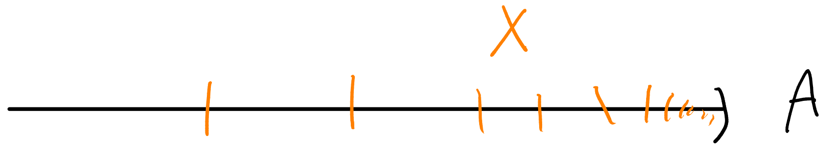
$G(\alpha, \beta) := F(h(\alpha))(\beta)$. $\square$

¿Vale con $<$ (estricto)?

Notar:
- Si κ es $\aleph_0 = \omega$, el enunciado estricto sí vale (unión de finitos es finita).
- Y para sucesores en general: $(|\cdot| < \kappa^+ \iff |\cdot| \le \kappa)$
- $\aleph_\omega = \sup \{ \aleph_n : n < \omega \} = \bigcup \underbrace{\{ \aleph_n : n \in \omega \}}_{|\cdot| = \aleph_0}$.

Cofinalidad

Sea A poset. $X \subseteq A$ es <u>cofinal</u> si $\forall \alpha \in A\ \exists x \in X\ (\alpha \leq x)$. $f : Y \to A$ es <u>cofinal</u> si $f[Y]$ es cofinal.



Si $A = \gamma \in \mathrm{Lim}$, entonces

X cofinal en $\gamma \iff X$ no es acotado en $\gamma \iff \sup X = \gamma$

<u>Lema</u>: Si $X \subseteq A \subseteq \gamma$, X cofinal en A y A es cofinal en $\gamma \Rightarrow X$ cofinal en γ

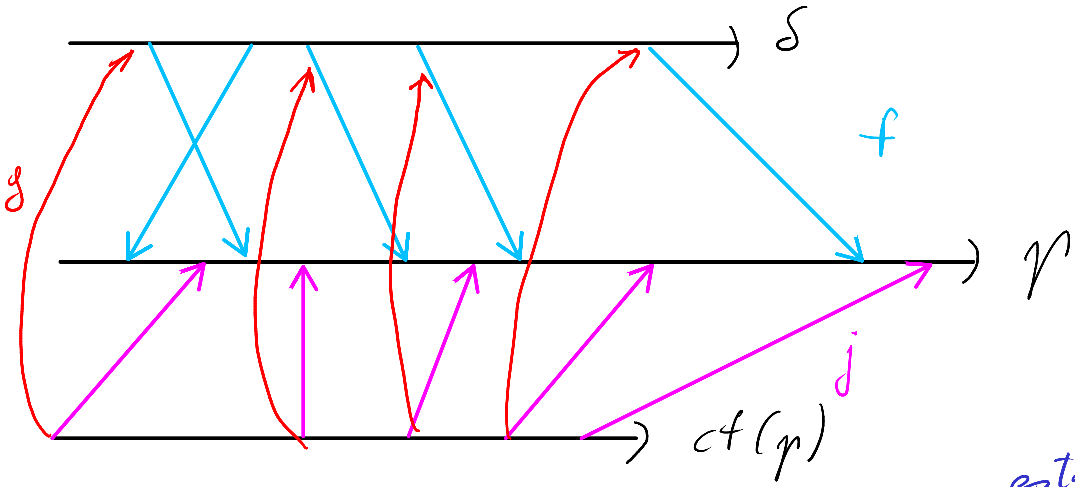
<u>Definición</u>

$$cf(\gamma) := \min\{\mathrm{Type}(A) : A \subseteq \gamma \text{ cofinal}\}.$$

<u>Ejemplos</u>:
- $cf(\alpha + 1) = 1$
- $cf(0) = 0$
- $cf(\omega) = \omega$
- $cf(\omega + \omega) = \omega$ $\quad (\omega + \omega = \sup\{\omega + n : n \in \omega\})$
- $cf(\aleph_\omega) = \omega = cf(\aleph_{\omega \cdot 2})$
- $cf(\aleph_1) = \aleph_1$

<u>Lema</u> (de factorización): $\gamma \in \mathrm{Lim}$, $\delta \in \mathrm{Od}$. f cofinal $\Rightarrow \exists\, g : cf(\gamma) \to \delta$ estr. creciente. y $f \circ g$ es estr. creciente y cofinal.

$$\begin{tikzcd} \delta \arrow[r, "f"] & \gamma \\ cf(\gamma) \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$



$$A_\alpha := \{\theta < \delta : \overbrace{f(\theta) \geq j(\alpha)}^{\text{cofinal}} \wedge \overbrace{\forall \beta < \alpha (f(g(\beta)) < f(\theta))}^{\text{estr. creciente}}\}\ \ \big]\ f\circ g.$$

[candidato $= g(\alpha)$

$g : cf(\gamma) \longrightarrow \delta + 1$ $\qquad$ $\beta < \alpha \Rightarrow A_\beta \supseteq A_\alpha.$

$\Rightarrow \text{mín} A_\beta \leq \text{mín} A_\alpha$

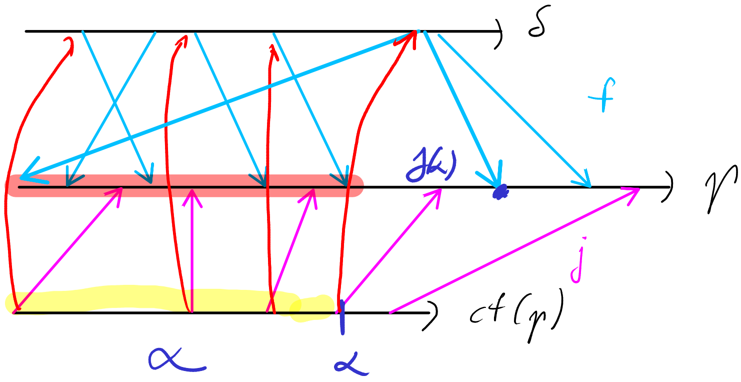
$$g(\alpha) := \begin{cases} \text{mín}\, A_\alpha & \text{si } A_\alpha \neq \varnothing \\ \delta & \text{si } A_\alpha = \varnothing, \end{cases}$$

(*) Si $g(\alpha) \neq \delta$ y $\beta < \alpha \Rightarrow (f\circ g)(\beta) < (f\circ g)(\alpha)$ y $g(\beta) \neq g(\alpha)$

– $\forall \alpha \in cf(\gamma)$, $g(\alpha) \neq \delta$.

Supongamos $\forall \beta < \alpha$ $g(\beta) \neq \delta$. $(f\circ g)\restriction\alpha : \alpha \longrightarrow \gamma$ es estr. creciente. (*) $\alpha < cf(\gamma)$.

$\therefore$ $(f\circ g)\restriction\alpha$ no es cofinal en γ



□

$\underline{\text{Lema}}$: $\gamma \in \text{Lím}$. $A \subseteq \gamma$ cofinal. $\therefore$ $cf(\gamma) = cf(Type(A))$

$\underline{\text{Prueba}}$: $\boxed{\geq}$ $f : Type(A) \xrightarrow[\text{iso.}]{} A$ (estrict. creciente)

f vista de $Type(A) \longrightarrow \gamma$ es cofinal.

$g : cf(\gamma) \longrightarrow Type(A)$ estr. creciente

$f \circ g : cf(\gamma) \longrightarrow \gamma$ estr. creciente y cofinal.

$cf(\gamma) \leq Type(A)$

$\underline{\text{Ejercicio}}$.

cual f diagrama

$$\begin{tikzcd}
\delta \arrow[r, "f", "\text{estrictamente creciente}"'] & \gamma \\
cf(\gamma) \arrow[u, dashed, "\text{cofinal } g"] \arrow[ur, dashed, "\text{estr. creciente. cofinal}"']
\end{tikzcd}$$

Por esto, $\overset{f'}{g} : cf\overset{\delta}{(\gamma)} \longrightarrow \overset{\gamma}{Type}(A)$ es cofinal.

$\therefore$ $cf(Type(A)) \leq cf(\gamma)$.

$\boxed{\leq}$ jueves.